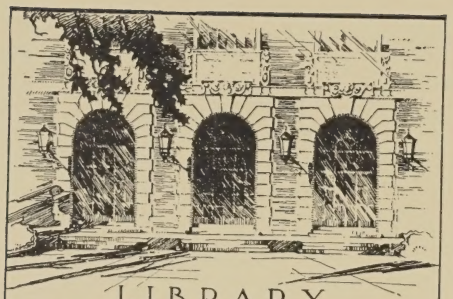


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

532.2
Al2t2

LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/traitedelequilib00alem

167

TRAITÉ
DE L'ÉQUILIBRE
ET DU MOUVEMENT
DES FLUIDES.

On trouve chez BRIASSON, *les Ouvrages ci-après de Mathématique de M. d'Alembert;*

SÇAVOIR,

TRAITÉ de Dynamique, nouvelle Edition, considérablement augmentée, *in*-4. *fig.* 1758. La premiere Edition est de 1743.

— Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides, pour servir de suite au *Traité de Dynamique*, *in*-4. *fig.* 1770.

— Essai d'une nouvelle Théorie de la résistance des Fluides, *in*-4. *fig.* 1752.

Nota. *Ces trois Traités ont une très-grande liaison entr'eux; cependant ils seront toujours séparés au gré de l'acheteur.*

— Réflexions sur la cause générale des Vents, *in*-4. *fig.* 1747.

— Recherches sur la précession des Equinoxes & sur la nutation de l'Axe de la Terre, *in*-4. *fig.* 1749.

— Recherches sur différens points importans du Systême du Monde, *in*-4. 3 vol. *fig.* 1754 & 1756.

— Opuscules Mathématiques, ou Mémoires sur différens sujets de Geométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. *in*-4. 5 vol. *fig.* 1761, 1764, 1767 & 1768. *Le quatriéme & le cinquiéme volume se vendent séparément.*

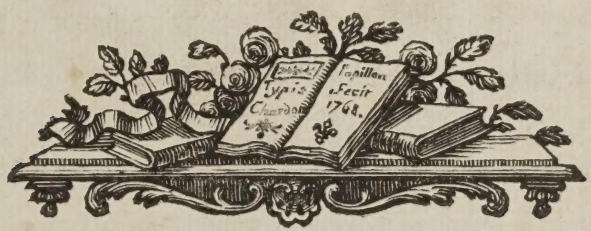
Nota. Les *Elémens de Musique* du même Auteur, qu'on peut mettre au nombre de ses Ouvrages Mathématiques, se trouvent à Paris chez *Desaint* & *Saillant*, & à Lyon chez *Jean-Marie Bruyset.*

TRAITÉ
DE L'ÉQUILIBRE
ET DU MOUVEMENT
DES FLUIDES,

Pour ſervir de ſuite au Traité de Dynamique.

Par M. D'ALEMBERT, *de l'Académie Françoiſe, des Académies Royales des Sciences de France, de Pruſſe, d'Angleterre & de Ruſſie, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, de l'Inſtitut de Bologne, & des Sociétés Royales des Sciences de Turin & de Norwege.*

Nouvelle Edition, revûe & augmentée par l'Auteur.



A PARIS,

Chez BRIASSON, Libraire, rue Saint Jacques, à la Science.

M. DCC. LXX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

532.2
A1258

AVERTISSEMENT
DE L'AUTEUR
POUR CETTE NOUVELLE EDITION.

COMME pluſieurs des matieres que j'ai traitées dans la premiere Edition de ce Livre en 1744, ont été depuis encore plus approfondies dans différens Ouvrages que j'ai donnés au Public, principalement dans mon *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la réſiſtance des Fluides*, imprimé en 1752, & dans les différens Volumes d'*Opuſcules Mathématiques* que j'ai publiés depuis huit à neuf ans, j'aurai ſoin dans la nouvelle Edition que je donne de ce Traité-ci, d'indiquer aux Lecteurs les divers endroits de mes autres Ouvrages, où ils pourront trouver de nouvelles vûes ſur les queſtions d'Hydroſtatique & d'Hydrodynamique que j'ai diſcutées ou propoſées dans le préſent Traité.

PRÉFACE

DE LA PREMIERE ÉDITION.

Les propriétés ſenſibles des Corps qui nous environnent, ont entr'elles des rapports plus ou moins marqués, dont la connoiſſance eſt preſque toujours le terme preſcrit à nos lumieres, & doit être par conſéquent notre principal objet dans l'étude de la Phyſique. En vain l'Expérience nous inſtruira-t-elle d'un grand nombre de faits : des vérités de cette eſpéce nous ſeront preſqu'entiérement inutiles, ſi nous ne nous appliquons avec ſoin à en trouver la dépendance mutuelle, à ſaiſir, autant qu'il eſt poſſible, le tronc principal qui les unit, à découvrir même par leur moyen d'autres faits plus cachés, & qui ſembloient ſe dérober à nos recherches. Tel eſt le but que le Phyſicien doit ſe propoſer; telles ſont les vûes par leſquelles il peut ſe montrer vraiment Philoſophe.

Ce petit nombre de réflexions ſuffit, ce me ſemble, pour prouver combien il eſt à propos d'unir la Geométrie à la Phyſique. C'eſt par le ſecours de la Geométrie qu'on parvient à déterminer exactement la quantité d'un effet compliqué, & dépendant d'un autre effet mieux connu : cette ſcience nous eſt par conſéquent preſque toujours néceſſaire dans la comparaiſon & l'Analyſe des faits que l'Expérience nous découvre. Il faut avouer néanmoins que les différens ſujets de Phyſique ne ſont pas également ſuſceptibles de l'application de la Geométrie. Si les obſervations qui ſervent de baſe au calcul ſont en petit nombre, ſi elles ſont ſimples & lumineuſes, le Geométre ſait alors en tirer le plus grand avantage, & en déduire les connoiſſances Phyſiques les plus capables de ſatisfaire l'eſprit. Des obſervations moins parfaites ſervent ſouvent à le conduire dans ſes recherches, & à donner à ſes découvertes un nouveau dégré de certitude : quelquefois même les raiſonnemens Mathématiques peuvent l'inſtruire & l'éclairer, quand l'Expérience eſt muette, ou ne parle que d'une maniere confuſe. Enfin ſi les matieres qu'il ſe propoſe de traiter ne laiſſent

aucune

aucune priſe à ſes calculs, il ſe réduit alors aux ſimples faits dont les Obſervations l'inſtruiſent: incapable de ſe contenter de fauſſes lueurs quand la lumiere lui manque, il n'a point recours à des raiſonnemens vagues & obſcurs, au défaut de démonſtrations rigoureuſes.

Newton, qui a été inconteſtablement le plus grand Phyſicien de ſon ſiécle, n'eſt parvenu à ce degré de gloire que pour avoir conſtamment ſuivi une pareille Méthode. Les découvertes dont ce grand homme a enrichi la Phyſique, montrent aſſez qu'il eſt le modéle que nous devons nous propoſer, ſi nous voulons faire quelques progrés dans cette ſcience; & que nos ſuccès dépendront de notre exactitude à ne point nous écarter des régles que nous venons d'établir.

La matiere que j'entreprends de traiter dans cet Ouvrage, eſt peut-être une de celle où ces régles peuvent le mieux s'appliquer. Dès les premiers pas qu'on veut faire dans la Théorie des Fluides, on s'apperçoit aiſément combien le ſecours de l'Expérience eſt néceſſaire pour en connoître les propriétés. Mais chercherons-nous à nous éclairer dans un ſujet ſi compliqué par

des Expériences multipliées à l'infini? Preſque toutes celles que nous pouvons tenter ſur cette matiere ſont ſi mêlées de circonſtances qui nous éloignent de la préciſion, & nous dérobent, pour ainſi dire, la vérité, qu'elles ne doivent être regardées pour la plûpart, que comme un moyen de confirmer & d'appuyer nos calculs. L'Art conſiſte donc à les réduire & à les ſimplifier pour en former un véritable Corps de ſcience, & pour en déduire une Théorie certaine & lumineuſe.

C'eſt auſſi l'objet que je me ſuis propoſé en travaillant à cet Ouvrage. Dans le Traité de Dynamique dont celui-ci eſt la ſuite, j'avois pour but de réduire au plus petit nombre poſſible les Loix de l'équilibre & du mouvement des Corps ſolides : j'ai tâché de faire ici la même choſe pour les Fluides.

Il y a cependant une différence eſſentielle entre la matiere que j'ai traitée dans mon premier Ouvrage, & celle que j'entreprends de traiter dans celui-ci. La Méchanique des Corps ſolides n'étant appuyée que ſur des Principes Métaphyſiques & indépendans de l'Expérience, on peut déterminer exactement ceux de ces Prin-

cipes qui doivent ſervir de fondement aux autres. La Théorie des Fluides, au contraire, doit néceſſairement avoir pour baſe l'Expérience, dont nous ne recevons même que des lumieres fort bornées. Obligés de nous en tenir aux Principes qu'elle nous fournit, nos recherches ſe réduiſent à ſavoir diſcerner ceux de ces Principes qui réuniſſent à-la-fois le plus de ſimplicité & de certitude. Les matériaux de l'édifice nous ſont donnés : l'arrangement de ces matériaux & le choix particulier qu'il peut y avoir à faire entr'eux, eſt la ſeule choſe dont nous ſoyons maîtres de diſpoſer.

Si l'on connoiſſoit la figure & la diſpoſition mutuelle des particules qui compoſent les Fluides, il ne faudroit point d'autres Principes que ceux de la Méchanique ordinaire, pour déterminer les Loix de leur équilibre & de leur mouvement. Car c'eſt toujours un Problême déterminé, que de trouver l'action mutuelle de pluſieurs Corps qui ſont unis entr'eux, & dont on connoît la figure & l'arrangement reſpectif. Mais comme nous ignorons la forme & la diſpoſition des particules fluides, la détermination des Loix de leur équilibre & de leur mouvement eſt un

Problême, qui enviſagé comme purement Geométrique, ne contient pas aſſez de données, & pour la ſolution duquel on eſt obligé d'avoir recours à de nouveaux Principes.

Nous jugerons aiſément du plan que nous devons ſuivre dans cette recherche, ſi nous nous appliquons à connoître d'abord quelle différence il doit y avoir entre les Principes généraux du mouvement des Fluides, & ceux dont nous avons fait dépendre les Loix de la Méchanique des Corps ordinaires. Ces derniers principes, comme nous l'avons dit ailleurs, peuvent ſe réduire à trois ; ſavoir, la force d'inertie, le mouvement compoſé, & l'équilibre de deux maſſes égales, animées en ſens contraire de deux vîteſſes virtuelles égales. Nous avons donc ici deux choſes à examiner ; en premier lieu, ſi ces trois Principes ſont les mêmes pour les Fluides que pour les ſolides ; en ſecond lieu, s'ils ſuffiſent à la Théorie que nous entreprenons de donner.

Les particules des Fluides étant des Corps, il n'eſt pas douteux que le principe de la force d'inertie, & celui du mouvement compoſé, ne conviennent à chacune de ces parties : il en

ſeroit de même du Principe de l'équilibre, ſi on pouvoit comparer ſéparément les particules fluides entr'elles : mais nous ne pouvons comparer enſemble que des maſſes dont l'action mutuelle dépend de l'action combinée de différentes parties qui nous ſont inconnues : l'Expérience ſeule peut donc nous inſtruire ſur les Loix fondamentales de l'Hydroſtatique.

L'équilibre des Fluides, animés par une force de direction & de quantité conſtante, comme la peſanteur, eſt celui qui ſe préſente d'abord, & qui eſt en effet le plus facile à examiner. Si on verſe une liqueur homogene dans un Tuyau compoſé de deux branches cylindriques égales & verticales, unies enſemble par une branche cylindrique horizontale, la premiere choſe qu'on obſerve, c'eſt que la liqueur ne ſauroit y être en équilibre, ſans être à la même hauteur dans les deux branches. Il eſt facile de conclure de-là, que le Fluide contenu dans la branche horizontale, eſt preſſé en ſens contraire par l'action des colomnes verticales. L'Expérience apprend de plus, que ſi une des branches verticales, & même, ſi l'on veut, une partie de la branche horizontale eſt anéantie, il faut pour

retenir le Fluide, la même force qui ſeroit néceſſaire pour ſoutenir un Tuyau cylindrique égal à l'une des branches verticales, & rempli de Fluide à la même hauteur ; & qu'en général, quelle que ſoit l'inclinaiſon de la branche qui joint les deux branches verticales, le Fluide eſt également preſſé dans le ſens de cette branche & dans le ſens vertical. Il n'en faut pas davantage pour nous convaincre, que les parties des Fluides peſans ſont preſſées & preſſent également en tout ſens. Cette propriété étant une fois découverte, on peut aiſément reconnoître qu'elle n'eſt pas bornée aux liqueurs dont les parties ſont animées par une force conſtante & de direction donnée, mais qu'elle appartient toujours aux Fluides, quelles que ſoient les forces qui agiſſent ſur leurs différentes parties. Il ſuffit pour s'en aſſurer, d'enfermer une liqueur dans un vaſe de figure quelconque, & de la preſſer avec un Piſton ; car ſi l'on fait une ouverture en quelque point que ce ſoit de ce vaſe, il faudra appliquer en cet endroit une preſſion égale à celle du Piſton pour retenir la liqueur ; obſervation qui prouve inconteſtablement que la preſſion des particules ſe répand également

en tout ſens, quelle que ſoit la puiſſance qui tend à les mouvoir.

Cette propriété générale, conſtatée par une Expérience ſi ſimple, eſt le fondement de tout ce qu'on peut démontrer ſur l'équilibre des Fluides. Néanmoins quoiqu'elle ſoit connue & miſe en uſage depuis fort long-tems, il eſt aſſez ſurprenant que les Loix principales de l'Hydroſtatique en ayent été ſi obſcurément déduites. Parmi une foule d'Auteurs dont la plûpart n'ont fait que copier ceux qui les avoient précédés, à peine en trouve-t-on qui expliquent avec quelque clarté, pourquoi deux liqueurs ſont en équilibre dans un Syphon; pourquoi l'eau contenue dans un vaſe qui va en s'élargiſſant de haut en bas, preſſe le fond de ce vaſe avec autant de force que ſi elle étoit contenue dans un vaſe cylindrique de même baſe & de même hauteur, quoiqu'en ſoutenant un tel vaſe, on ne porte que le poids du liquide qui y eſt contenu; pourquoi un Corps d'une peſanteur égale à celle d'un pareil volume de Fluide s'y ſoutient en quelqu'endroit qu'on le place, &c. On ne viendra jamais à bout de démontrer exactement ces propoſitions, que par un calcul net

& précis de toutes les forces qui concourent à la production de l'effet qu'on veut examiner, & par la détermination exacte de la force qui en réſulte. C'eſt ce que j'ai tâché de faire d'une maniere qui ne laiſſât dans l'eſprit aucune obſcurité, en employant pour unique Principe la preſſion égale en tout ſens. J'en ai déduit juſqu'à la propriété ſi connue des Fluides, de ſe diſpoſer de maniere que leur ſurface ſoit de niveau, propriété qui n'a peut-être pas été trop bien prouvée juſqu'ici.

Au reſte, quoique l'expoſition & le développement des Loix connues de l'équilibre des Fluides ſoit l'objet principal de la premiere partie de cet Ouvrage, néanmoins je me ſuis auſſi propoſé de la rendre intéreſſante pour les Savans, ſoit en y traitant des matieres qui ne l'avoient point encore été, comme l'équilibre des Fluides dont les parties ſont adhérentes entr'elles; ſoit en approfondiſſant celles qui m'ont paru le mériter davantage, comme l'équilibre des Fluides élaſtiques; ſoit enfin en propoſant quelques conjectures ſur différens Problêmes d'Hydroſtatique, dont la ſolution pourra donner lieu aux recherches des Geométres.

Les

Les Principes généraux de l'équilibre des Fluides étant connus, il s'agit à préſent d'examiner l'uſage que nous en devons faire, pour trouver les Loix de leur mouvement dans les vaſes qui les contiennent.

La Méthode générale dont nous nous ſommes ſervis dans notre *Dynamique*, pour déterminer le mouvement d'un ſyſtême de Corps qui agiſſent les uns ſur les autres, eſt de regarder la vîteſſe avec laquelle chaque Corps tend à ſe mouvoir comme compoſée de deux autres vîteſſes, dont l'une eſt détruite, & l'autre ne nuit point au mouvement des Corps adjacens. Pour appliquer cette Méthode à la queſtion dont il s'agit ici, nous devons examiner d'abord quels doivent être les mouvemens des particules du Fluide, pour que ces particules ne ſe nuiſent point les unes aux autres. Or l'Expérience de concert avec la Théorie nous fait connoître que quand un Fluide s'écoule d'un vaſe, ſa ſurface ſupérieure demeure toujours ſenſiblement horizontale : d'où l'on peut conclure que la vîteſſe de tous les points d'une même tranche horizontale, eſtimée ſuivant le ſens vertical, eſt la même dans tous ces points, & que cette vîteſſe, qui

eſt, à proprement parler, la vîteſſe de la tranche, doit être en raiſon inverſe de la largeur de cette même tranche, pour qu'elle ne nuiſe point au mouvement des autres. Par ce Principe combiné avec le Principe général, j'ai réduit fort aiſément aux Loix de l'Hydroſtatique ordinaire les Problêmes qui ont pour objet le mouvement des Fluides, comme j'avois réduit les queſtions de Dynamique aux Loix de l'équilibre des Corps ſolides.

Il me paroît inutile de démontrer ici fort au long le peu de ſolidité d'un Principe employé autrefois par preſque tous les Auteurs d'Hydraulique, & dont pluſieurs ſe ſervent encore aujourd'hui, pour déterminer le mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe. Selon ces Auteurs, le Fluide qui s'échappe à chaque inſtant eſt preſſé par le poids de toute la colomne de Fluide dont il eſt la baſe. Cette propoſition eſt évidemment fauſſe, lorſque le Fluide coule dans un Tuyau cylindrique entiérement ouvert & ſans aucun fond. Car la liqueur y deſcend alors comme feroit une maſſe ſolide & peſante, ſans que ſes parties, qui ſe meuvent toutes avec une égale vîteſſe, exercent les unes ſur les autres aucu-

ne action. Si le Fluide ſort du Tuyau par une ouverture faite au fond, alors la partie qui s'échappe à chaque inſtant, peut à la vérité ſouffrir quelque preſſion par l'action oblique & latérale de la colomne qui appuye ſur le fond; mais comment prouvera-t-on que cette preſſion eſt préciſément égale au poids de la colomne de Fluide qui auroit l'ouverture du fond pour baſe?

Je ne m'arrêterai point non plus à faire voir ici dans un grand détail, avec quelle facilité on déduit de mes Principes la ſolution de pluſieurs Problêmes fort difficiles qui ont rapport à la matiere que je traite, comme la preſſion des Fluides contre les vaiſſeaux dans leſquels ils coulent, le mouvement d'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe mobile & entraîné par un poids &c. Ces différens Problêmes qui n'avoient été réſolus juſqu'à préſent que d'une maniere indirecte, ou pour quelques cas particuliers ſeulement, ſont des Corollaires fort ſimples de ma Méthode. En effet, pour déterminer la preſſion mutuelle des particules du Fluide, il ſuffit d'obſerver que ſi les tranches ſe preſſent les unes les autres, c'eſt parce que la figure & la forme du

vaſe les empêche de conſerver le mouvement qu'elles auroient, ſi chacune d'elles étoit iſolée. Il faut donc par notre Principe, regarder ce mouvement comme compoſé de celui qu'elles ont réellement, & d'un autre qui eſt détruit. Or c'eſt en vertu de ce dernier mouvement détruit qu'elles ſe preſſent mutuellement, avec une force qui réagit contre les parois du vaſe. La quantité de cette force eſt donc facile à déterminer par les Loix de l'Hydroſtatique, & ne peut manquer d'être connue dès qu'on a trouvé la vîteſſe du Fluide à chaque inſtant. Il n'y a pas plus de difficulté à déterminer le mouvement des Fluides dans des vaſes mobiles.

Mais un des plus grands avantages qu'on tire de notre Théorie, c'eſt de pouvoir démontrer que la fameuſe Loi de Méchanique, appellée *la conſervation des forces vives*, a lieu dans le mouvement des Fluides comme dans celui des Corps ſolides.

Ce Principe, reconnu aujourd'hui pour vrai par tous les Méchaniciens, & que j'ai expliqué fort au long dans mon premier Ouvrage, eſt celui dont M. *Daniel Bernoulli* a déduit les Loix du mouvement des Fluides dans ſon *Hydrody-*

namique. Dès l'année 1727, le même Auteur avoit donné un Eſſai de ſa nouvelle Théorie: c'eſt le ſujet d'un très-beau Mémoire imprimé dans le *Tom. II. de l'Académie de Péterſbourg.* M. *Daniel Bernoulli* n'apporte dans ce Mémoire d'autre preuve de la conſervation des forces vives dans des Fluides, ſinon qu'on doit regarder un Fluide comme un amas de petits Corpuſcules élaſtiques qui ſe preſſent les uns les autres, & que la conſervation des forces vives a lieu, de l'aveu de tout le monde, dans le choc d'un ſyſtême de Corps de cette eſpéce. Il me ſemble qu'une pareille preuve ne doit pas être regardée comme d'une grande force : auſſi l'Auteur paroît-il ne l'avoir donnée que comme une induction, & ne l'a même rappellée en aucune maniere dans ſon grand Ouvrage ſur les Fluides, qui n'a vû le jour que pluſieurs années aprés. Il m'a donc paru qu'il étoit néceſſaire de prouver d'une maniere plus claire & plus exacte le Principe dont il s'agit, appliqué aux Fluides. J'avois déja eſſayé de le démontrer en peu de mots à la fin de mon *Traité de Dynamique ;* mais on en trouvera ici une preuve plus étendue & plus détaillée.

Au reſte, quoique M. *Daniel Bernoulli* n'ait pas démontré le Principe général qui ſert de fondement à ſon Ouvrage, on n'en doit pas moins convenir que ſa Théorie eſt très-élégante, & qu'il eſt conſtamment le premier qui ait entrepris de déterminer le mouvement des Fluides par des Méthodes ſûres & non arbitraires. Auſſi ſuis-je obligé d'avouer ici, que les réſultats de mes ſolutions s'accordent preſque toujours avec les ſiens. Il en faut néanmoins excepter un petit nombre de Problêmes. Ce ſont ceux où cet habile Géométre a employé le Principe de la conſervation des forces vives, pour déterminer le mouvement d'un Fluide dans lequel il y a quelque partie dont la vîteſſe diminue ou augmente en un inſtant d'une quantité finie. Tel eſt entr'autres le Problême où il s'agit de trouver la vîteſſe d'un Fluide ſortant d'un vaſe qu'on entretient toujours plein à la même hauteur, en ſuppoſant que la petite lame de Fluide qu'on ajoute à chaque inſtant à la ſurface, reçoive ſon mouvement du Fluide inférieur par lequel elle eſt entraînée. Il eſt évident que dans une pareille hypothèſe, cette lame de Fluide qui n'avoit aucune vîteſſe dans l'inſtant qu'on l'a appliquée

ſur la ſurface, reçoit dans l'inſtant ſuivant une vîteſſe finie égale à celle de la ſurface qui l'entraîne. Or, ſans vouloir examiner ſi cette hypothèſe eſt conforme à la nature, ou non, il eſt toujours * certain qu'on ne doit point employer le Principe de la conſervation des forces vives pour trouver le mouvement d'un ſyſtême de Corps, lorſqu'on ſuppoſe qu'il y a dans ce ſyſtême quelque Corps dont la vîteſſe varie en un inſtant d'une quantité finie. C'eſt pour cette raiſon que dans ce Problême & dans quelques autres, mes ſolutions ſont différentes de celles de M. *Daniel Bernoulli.*

Un autre reproche qu'on pourroit faire à cet illuſtre Auteur, c'eſt qu'il ſemble avoir ſuppoſé que quand un Fluide ſort d'un vaſe par une ouverture faite au fond, la petite maſſe qui s'échappe à chaque inſtant, paſſe tout-d'un-coup de la vîteſſe qu'elle a, lorſqu'elle eſt encore renfermée dans le vaſe, à une autre vîteſſe qui en differe d'une quantité finie. Il eſt vrai que cette ſuppoſition, pourvû qu'on ne la prenne pas à la rigueur, n'empêchera point, comme je l'ai fait voir, que les ſolutions de M. *Daniel Bernoulli*

* Voyez le *Traité de Dynamique*, art. 155 & 156, premiere Edition; & art. 187, 188, ſeconde Edition.

ne ſoient exactes pour la plûpart, & qu'il n'ait pû les déduire du Principe des forces vives. Mais c'eſt peut-être auſſi pour avoir donné à cette ſuppoſition trop d'étendue & de réalité, que ce même Auteur s'eſt ſervi des forces vives en d'autres cas où il n'auroit pas dû en faire uſage.

L'inſuffiſance du Principe des forces vives pour conduire à une Théorie lumineuſe ſur le mouvement des Fluides, paroît avoir été un des principaux motifs qui ont engagé le célèbre M. *Jean Bernoulli* à compoſer ſa nouvelle Hydraulique, imprimée en 1743, dans le Recueil de ſes œuvres. J'ai donné dans un article particulier le précis de la Méthode de ce grand Géomètre, & des difficultés qu'il m'a paru qu'on y pouvoit oppoſer. On verra, ſi je ne me trompe, par l'expoſé que j'en ai fait, qu'il reſte encore dans la Théorie de M. *Bernoulli* de l'incertain & de l'arbitraire. Son principe général ſe déduit d'ailleurs ſi facilement de celui des forces vives, qu'il paroît n'être autre choſe que ce dernier Principe préſenté ſous une autre forme. Auſſi cherche-t-il à confirmer ſa Méthode par des ſolutions indirectes appuyées ſur la Loi de la conſervation des forces vives.

Long-tems

Long-tems avant Meſſieurs *Bernoulli*, l'Illuſtre *Newton* avoit donné dans ſes *Principes* un léger eſſai ſur la matiere dont il s'agit. Tout le monde connoît ſa fameuſe Cataracte. Mais quelqu'ingénieuſe qu'en puiſſe être la formation, on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'elle eſt fondée ſur un grand nombre de ſuppoſitions purement gratuites, démenties preſque toutes par la Théorie & par l'Expérience. L'application & l'uſage de mes Principes, & les objections de M. *Bernoulli* contre cette même Cataracte, * ſuffiront au Lecteur pour juger de la vérité de ce que j'avance ici.

J'oſe me flatter, ſi une aveugle prévention pour mon propre Ouvrage ne me ſéduit point, qu'on conviendra ſans peine de la ſimplicité & de la fécondité des Principes que j'ai ſubſtitués aux Méthodes des Geométres que je viens de citer. Mon deſſein n'eſt point ici de déprimer le travail de ces grands Hommes : mais les Sciences telles que celle-ci, ſont de nature à ſe perfectionner toujours de plus en plus : aidés des lumieres que les Savans qui nous ont précédés, ont répandues ſur des matieres obſcures, nous

* Art. LX. de ſon *Hydraulique*.

ſommes quelquefois aſſez heureux, pour avancer plus loin qu'ils n'ont fait dans les routes qu'eux-mêmes nous ont tracées; & ſi nous oſons les combattre, c'eſt avec des armes que nous tenons d'eux.

Je ne prétends pas cependant avoir ſurmonté toutes les difficultés qu'il pouvoit y avoir à vaincre dans une matiere ſi délicate. Il y a des cas où les mouvemens des particules ſont ſi ſubits & ſi peu réguliers, qu'ils ne laiſſent, pour ainſi dire, aucune priſe au calcul, & que le Problême demeure indéterminé. Mais il me ſemble que ces difficultés naiſſent plutôt du fond du ſujet & du peu de connoiſſances que nous avons ſur les Fluides, que de la nature de ma Méthode.

Les Principes dont je me ſuis ſervi pour déterminer le mouvement des Fluides non élaſtiques, s'appliquent avec une extrême facilité aux Loix du mouvement des Fluides élaſtiques : j'ai donc cru devoir m'étendre particuliérement ſur ce ſujet qu'on peut regarder comme nouveau, puiſque M. *Daniel Bernoulli* dans ſon *Hydrodynamique*, s'eſt contenté d'examiner en peu de mots & par une Méthode indirecte le mouve-

ment d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe par une ſeule ouverture fort petite, en ſuppoſant la chaleur conſtante, & l'élaſticité proportionnelle à la denſité.

Le mouvement d'un Fluide élaſtique differe de celui d'un Fluide ordinaire, principalement par la Loi des vîteſſes de ſes différentes couches. Ainſi, par exemple, lorſqu'un Fluide non élaſtique coule dans un Tuyau cylindrique, comme il ne change point de volume, ſes différentes tranches ont toutes la même vîteſſe. Il n'en eſt pas de même d'un Fluide élaſtique. Car s'il ne ſe dilate que d'un côté, les tranches inférieures ſe meuvent plus vîte que les ſupérieures, à peu près comme il arrive à un reſſort attaché à un point fixe, & dont les parties parcourent en ſe dilatant d'autant moins d'eſpace qu'elles ſont plus proches de ce point. Telle eſt la différence principale qu'il doit y avoir dans la Théorie du mouvement des Fluides élaſtiques, & de ceux qui ne le ſont pas. La Méthode pour trouver les Loix de leur mouvement, & les Principes qu'on employe pour cela, ſont d'ailleurs entiérement ſemblables.

C'eſt auſſi en ſuivant cette même Méthode,

que j'ai examiné le mouvement des Fluides dans des Tuyaux flexibles; matiere entiérement nouvelle, mais dont j'ai été obligé d'expoſer ſimplement les Principes, en les appliquant ſeulement à quelques cas particuliers, à cauſe de l'extrême complication de calculs, où une recherche plus étendue n'auroit pas manqué de me jetter; ce qui n'auroit ſervi qu'à remplir inutilement pluſieurs pages de caracteres Algébriques, ſans inſtruire davantage le Lecteur.

Je ſuis au reſte bien éloigné de penſer que la Théorie que j'ai établie ſur le mouvement des Fluides dans des Tuyaux flexibles, puiſſe nous conduire à la connoiſſance de la Méchanique du Corps humain, de la vîteſſe du ſang, de ſon action ſur les vaiſſeaux dans leſquels il circule &c. Il faudroit pour réuſſir dans une telle recherche, ſavoir exactement juſqu'à quel point les vaiſſeaux peuvent ſe dilater, connoître parfaitement leur figure, leur élaſticité plus ou moins grande, leurs différentes anaſtomoſes, le nombre, la force & la diſpoſition de leurs valvules, le degré de chaleur & de tenacité du ſang, les forces motrices qui le pouſſent &c. Encore quand chacune de ces choſes ſeroit parfaitement connue,

la grande multitude d'élémens qui entreroient dans une pareille Théorie, nous conduiroit vraiſemblablement à des calculs impraticables. C'eſt en effet ici un des cas les plus compoſés d'un Problême, dont le cas le plus ſimple eſt fort difficile à réſoudre. Lorſque les effets de la nature ſont trop compliqués & trop peu connus pour pouvoir être ſoumis à nos calculs, l'Expérience, comme nous l'avons déja dit, eſt le ſeul guide qui nous reſte : nous ne pouvons nous appuyer que ſur des inductions déduites d'un grand nombre de faits. Voilà le plan que nous devons ſuivre dans l'examen d'une Machine auſſi compoſée que le Corps humain. Il n'appartient qu'à des Phyſiciens oiſifs de s'imaginer qu'à force d'Algébre & d'hypothèſes, ils viendront à bout d'en dévoiler les reſſorts, & de réduire en calcul l'art de guérir les hommes.

Après avoir déterminé par les Méthodes les plus exactes qu'il nous a été poſſible les Loix du mouvement des Fluides, il ne nous reſte plus qu'à examiner leur action ſur les Corps ſolides qui y ſont plongés & qui s'y meuvent. Rien n'eſt plus difficile que de donner là-deſſus des régles préciſes & exactes : car non-ſeulement

on ignore la figure des parties du Fluide & leur diſpoſition par rapport au Corps qui les frappe; on ignore auſſi juſqu'à quelle diſtance le Corps agit ſur le Fluide, & quelle route les particules prennent, lorſqu'elles ont été miſes en mouvement par ce Corps. Tout ce que l'Expérience nous apprend, c'eſt que les particules du Fluide après avoir été pouſſées, ſe replient enſuite derriere le Corps pour venir occuper l'eſpace qu'il laiſſe vuide par derriere.

Voici donc le plan que j'ai cru devoir ſuivre dans une recherche de la nature de celle-ci. J'ai déterminé d'abord le mouvement qu'un Corps ſolide doit communiquer à une infinité de petites boules dont on ſuppoſe qu'il eſt couvert: j'ai fait voir enſuite que le mouvement perdu par ce Corps dans un inſtant donné étoit le même, ſoit qu'il choquât à-la-fois un certain nombre de couches de ces petites boules, ſoit qu'il ne les choquât que ſucceſſivement; que de plus, la réſiſtance ſeroit la même quand les petits Corpuſcules ſeroient de toute autre figure que la ſphérique, & diſpoſés de quelque maniere que ce fût, pourvû que la maſſe totale de ces petits Corps contenus dans un eſpace don-

né, fût ſuppoſée la même que quand ils étoient de petites boules. Par ce moyen je ſuis arrivé à des formules générales ſur la réſiſtance, dans leſquelles il n'entre que le rapport des denſités du Fluide & du Corps qui s'y meut. J'ai déterminé auſſi par une Méthode ſemblable, la réſiſtance qu'un Corps ſolide éprouve, ſoit dans un Fluide élaſtique, ſoit dans un Fluide dont les parties ſont adhérentes entr'elles.

Enfin pour ne rien omettre de ce qui pouvoit rendre ma Théorie plus intéreſſante & plus générale, j'ai cru devoir expoſer auſſi la Méthode de M. *Newton*. Cette Méthode conſiſte, comme l'on ſait, à ſuppoſer qu'au lieu que le Corps vient frapper le Fluide, ce ſoit au contraire le Fluide qui frappe le Corps, & à déterminer par ce moyen le rapport de l'action d'un Fluide ſur une ſurface courbe, à ſon action ſur une ſurface plane. La difficulté principale eſt d'évaluer exactement l'action d'un Fluide contre un plan. Auſſi les plus grands Géométres ne ſont-ils point d'accord là-deſſus. Cette action vient en grande partie de l'accélération du Fluide, qui obligé de ſe détourner à la rencontre du plan, & de couler dans un Canal plus étroit, doit néceſ-

ſairement y couler plus vîte, & par ce moyen preſſer le plan. Mais on ignore juſqu'à quelle diſtance le Fluide peut s'accélérer des deux côtés du plan, & par conſéquent la quantité exacte de la preſſion qu'il exerce. C'eſt-là, ce me ſemble, le nœud principal de la queſtion, & la cauſe du partage qu'il y a entre les Géométres touchant la valeur abſolue de la réſiſtance.

Voilà ce que j'avois à dire ici ſur les Principes généraux de la Méchanique des Fluides, qui ſont le ſujet de la plus grande partie de ce Traité. Le reſte de l'Ouvrage eſt deſtiné à l'examen de différens points de la Théorie des Fluides, qui n'ont peut-être pas été approfondis juſqu'ici avec aſſez de ſoin. Telle eſt en premier lieu la Théorie de la Réfraction. Tout le monde ſait qu'un Corps ſolide qui paſſe d'un Fluide dans un autre, ne continue pas ſon chemin en ligne droite, mais qu'il s'écarte de ſa premiere route pour décrire une autre ligne, plus ou moins inclinée que la premiere à la ſurface du nouveau milieu dans lequel il eſt entré. C'eſt ce qu'on remarque en particulier dans les rayons de lumiere, qui ſe briſent en paſſant de l'air dans

dans le verre ou dans tel autre Corps tranſparent que ce ſoit. Ce Phenomene, connu d'abord par l'Expérience, a beaucoup exercé la ſagacité des Philoſophes. Il paroiſſoit naturel de faire dépendre la réfraction de la lumiere des mêmes Principes, que la réfraction des Corps ſolides qui traverſent un Fluide. C'eſt auſſi le parti qu'avoit pris *Deſcartes*, ſuivi en cela par un grand nombre de Phyſiciens. Quelques raiſonnemens vagues & dénués de préciſion que *Deſcartes* avoit faits, pour prouver que les principaux Phenomenes de la réfraction de la lumiere s'expliquoient parfaitement dans ſes Principes, ont paru, & paroiſſent encore à quelques Philoſophes des démonſtrations exactes & complettes. Une choſe néanmoins a toujours embarraſſé les Cartéſiens, c'eſt qu'il réſulte de leur Théorie même, que les milieux qui réſiſtent le moins à la lumiere, ſont ceux où elle s'approche de la perpendiculaire, & qu'ainſi il faut ſuppoſer qu'elle trouve plus de réſiſtance dans l'air que dans l'eau. Quelque révoltante que puiſſe paroître cette ſuppoſition, & les conſéquences qu'elle entraîne après elle, les Cartéſiens cependant s'y ſont toujours tenus retranchés comme

dans un aſyle où il étoit difficile de les forcer: car la nature des Corpuſcules lumineux nous étant entiérement inconnue, il n'eſt pas aiſé de démontrer que l'eau leur réſiſte plus que l'air. J'ai donc cru devoir tourner mes vûes d'un autre côté, en m'appliquant à examiner à fond les Loix de la réfraction des Corps ſolides, non par des Principes incertains & par des raiſonnemens haſardés, mais par une Méthode exacte & des calculs précis. Les propoſitions où ma Méthode m'a conduit, ſont pour la plûpart ſi paradoxes, ſi ſingulieres, & ſi éloignées de tout ce qu'on avoit cru juſqu'ici, qu'on ſentira aiſément combien cette matiere étoit nouvelle, quoique maniée par tant d'Auteurs différens. Il réſulte de mes démonſtrations, qu'aucune des Loix qu'on obſerve dans la réfraction de la lumiere, ne doit avoir lieu dans celle des Corps ſolides, & qu'ainſi c'eſt mal-à-propos qu'on a fait dépendre l'une & l'autre réfraction des mêmes Principes.

Pour donner à ma Théorie un nouveau degré de force, il m'a paru néceſſaire d'examiner les Principes généraux ſur leſquels la plûpart des Phyſiciens ont cru devoir appuyer les Loix de

la réfraction des Corps ſolides. J'ai choiſi la Théorie de M. de *Mairan*, qui eſt, à proprement parler, une extenſion de celle de *Deſcartes*. L'intérêt de la vérité, ou du moins de ce qui m'a paru l'être, m'a obligé d'expoſer fort au long les raiſons que j'ai eues pour établir ſur la réfraction des propoſitions contraires à celles de cet illuſtre Académicien : j'eſpere qu'il ne me déſapprouvera pas d'être entré là-deſſus dans un aſſez grand détail, s'il peut en réſulter de ſa part ou de la mienne, quelques lumieres ſur cet objet important de la Phyſique (*a*).

Le mouvement des Corps de figure quelconque dans des milieux de denſité uniforme ou variable, eſt une branche de la Réfraction. Je me ſuis étendu tant plus volontiers ſur cette matiere, qu'il m'a paru qu'elle fourniſſoit un vaſte champ à la Géométrie. Dans le Chapitre

(*a*) C'eſt à peu près ainſi que je m'exprimois dans la Préface de la premiere Edition. J'ignore ce que M. de *Mairan* a penſé de mes remarques; je déſirerois du moins que quelque Savant Géométre les examinât; c'eſt en partie pour cette raiſon que j'ai cru devoir les laiſſer ſubſiſter dans la ſeconde Edition que je donne aujourd'hui. Au reſte, que mes remarques ſoient fondées ou non, je ſaiſis avec empreſſement cette occaſion de rendre à M. de *Mairan* le tribut d'eſtime & d'attachement que je lui dois.

où je l'ai traitée, on trouvera entr'autres choſes la Méthode pour conſtruire dans pluſieurs cas inconnus juſqu'ici, les Trajectoires dans les milieux réſiſtans, & des obſervations nouvelles ſur la réfraction des Corps dans des milieux d'une denſité non uniforme, ſur le choc des Fluides contre les moulins à eau & à vent, & ſur le ſolide de la moindre réſiſtance.

Le dernier Chapitre de cet Ouvrage contient des recherches ſur les Fluides qui ſe meuvent en Tourbillon, & ſur le mouvement des Corps qui y ſont plongés. Mon deſſein dans ce Chapitre n'a été, ni de ſoutenir une cauſe auſſi déſeſpérée que celle des Tourbillons de *Deſcartes*, ni de lui porter de nouveaux coups. Je me ſuis ſeulement propoſé de donner au Public mes recherches ſur un ſujet qui eſt par lui-même aſſez curieux, indépendamment de l'application qu'on voudroit en faire au mouvement des Planetes. J'ai tâché de ne renfermer dans ma Théorie que des propoſitions nouvelles & intéreſſantes pour les Géométres. Si je ſuis entré dans quelque détail ſur les Tourbillons Cartéſiens, c'a été pour éclaircir quelques

articles ſinguliers & importans qui ont été juſqu'ici peu approfondis, & à la diſcuſſion deſquels la nature de mon ſujet m'a conduit. Un plus long examen du ſyſtême de *Deſcartes* n'auroit eu rien de nouveau. D'ailleurs, ce ſyſtême n'a preſque plus aujourd'hui de ſectateurs parmi les Phyſiciens : il eſt vrai que dans des circonſtances ſingulieres, de très-habiles Géométres ſe ſont déclarés partiſans de l'hypothèſe de *Deſcartes* : mais ils nous ont laiſſé tout lieu de croire, par les raiſons dont ils l'ont appuyée, que ce n'étoit pas ſérieuſement qu'ils en prenoient la défenſe (*a*). A l'égard de ceux que la prévention ou le défaut de lumieres attache encore aux Tourbillons, en vain chercherions-nous à les convaincre. Ce n'eſt point par des démonſtrations qu'on peut eſpérer de déraciner des préjugés auſſi invétérés, & de détruire une opinion à laquelle même quelques perſonnes croyent fauſſement que l'honneur de la nation eſt intéreſſé. Heureuſement ces perſonnes

(*a*) Voyez entr'autres les Diſſertations de M. Jean Bernoulli *ſur les orbites & les aphélies des Planetes*, & ſon *Eſſai d'une nouvelle Phyſique céleſte*, piéces qui ne paroiſſent pas dignes d'un ſi grand Géométre, ſur-tout la derniere.

ſont aujourd'hui en petit nombre, & le ſyſtême des Tourbillons eſt preſqu'entiérement proſcrit, même dans nos Ecoles (*a*).

(*a*) On peut voir ce que nous avons dit de ce ſyſtême à la fin de la Préface de nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, Paris 1749; dans le Diſcours préliminaire de l'Encyclopédie, & dans nos *Elémens de Philoſophie* à l'article *Aſtronomie*, Tom. IV de nos *Mélanges de Littérature* &c.

TABLE
DES TITRES
Contenus dans cet Ouvrage.

AVERTISSEMENT, page *v*
PRE'FACE, p. *vij*

LIVRE PREMIER.

De l'équilibre des Fluides, tant entr'eux qu'avec des Corps ſolides.

CHAPITRE I. *Loix générales de l'équilibre dans un Fluide dont les parties ſont animées par des peſanteurs quelconques*, page 1

CHAP. II. *De l'équilibre d'un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur dont la direction eſt conſtante*, p. 12

De l'équilibre d'un Fluide renfermé dans un vaſe ouvert par en haut & par en bas, p. 19

De l'équilibre des Fluides avec les ſolides qui y ſont plongés, p. 23

De la Loi de la preſſion dans les différentes couches d'un Fluide dont les parties ſont animées par une

pesanteur de direction constante, page 27
De l'équilibre de différens Fluides entr'eux, p. 29
CHAP. III. *Examen de différentes questions qu'on peut proposer sur l'équilibre des Fluides*, p. 31
§. I. *De la Loi de la pesanteur & de la densité dans les différentes tranches d'un Fluide, dont les parties sont animées par une pesanteur de direction constante*, ibid.
§. II. *De l'équilibre d'un Fluide où les tranches varient à-la-fois en pesanteur & en densité*, p. 37
CHAP. IV. *De l'adhérence que les parties des Fluides ont entr'elles*, p. 38
§. I. *Conjectures sur la cause de cette adhérence*, ibid.
§. II. *Où l'on examine quelles doivent être les Loix de l'équilibre des Fluides, si on a égard à l'adhérence de leurs parties*, p. 41
CHAP. V. *De l'équilibre des Fluides, dont la surface supérieure est courbe*, p. 48
De l'équilibre d'un Corps solide quelconque dans un Fluide, dont les parties sont animées par une pesanteur quelconque, p. 54
CHAP. VI. *De l'équilibre des Fluides élastiques*, p. 57
Loix générales de l'équilibre & de la pression des Fluides élastiques, p. 58
De la pression d'un Fluide élastique, dont les parties sont comprimées par leur seul poids, p. 62
Recherches sur la Loi de la densité, dans les parties d'un Fluide élastique qui se comprime par son propre poids. p. 65

LIVRE

LIVRE SECOND.

Du mouvement des Fluides renfermés dans des vaſes.

CHAPITRE I. *PRINCIPES généraux pour trouver le mouvement d'un Fluide renfermé dans un vaſe de figure quelconque*, page 73

CHAP. II. *Du mouvement des Fluides non élaſtiques dans des vaſes dont les parois ſont inflexibles*, p. 76

Préparation pour les propoſitions ſuivantes, ibid.

Du mouvement d'une portion donnée de Fluide non peſante, dans un vaſe indéfini, p. 77

REMARQUE *I. Où l'on détermine la premiere vîteſſe imprimée au Fluide*, p. 81

REMARQUE *II. Où l'on donne d'autres manieres de réſoudre le Problême précédent*, p. 82

REMARQUE *III. Où l'on examine dans quels cas le Fluide doit ceſſer d'être continu dans le vaſe, & ſe diviſer en deux ou pluſieurs portions*, p. 85

Du mouvement d'un Fluide peſant dans un vaſe indéfini, p. 88

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de grandeur finie, p. 91

REMARQUE *où l'on examine les ſuppoſitions qui ont été faites dans la ſolution des Problêmes précédens*, p. 98

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe par une

ouverture faite au fond, page 104
Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase par une ouverture verticale faite aux parois du vase, p. 112
Du mouvement d un Fluide dans un Tuyau incliné, p. 113
De la quantité de Fluide qui s'échappe d'un vase dans un tems donné, p. 117
Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase qu'on entretient toujours plein à la même hauteur, p. 119
De l'oscillation d'un Fluide dans un Syphon, p. 124
Du mouvement d'un Fluide qui sort d un vase par plusieurs ouvertures à-la-fois, p. 128
Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase submergé dans un autre Fluide, p. 132
Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase traversé de plusieurs diaphragmes, p. 137
De la pression qu un Fluide qui se meut dans un vase, exerce contre ses parois, p. 139
Des Fluides qui se meuvent dans des vases mobiles, p. 143
Méthode pour déterminer les endroits où doit se diviser un Fluide qui coule dans un vase, p. 147
Méthode pour déterminer les endroits où le Fluide se divise, en ayant égard à l'adhérence des parties, p. 154
CHAP. III. *Remarques sur les Théories que M^rs* Maclaurin *&* Jean Bernoulli *ont données du mouvement des Fluides*, p. 163

Abrégé de la Théorie de M. Maclaurin, ibid.
Remarque ſur cette Théorie, p. 168
Théorie de M. Jean Bernoulli, *ou extrait de ſon Hydraulique*, p. 171
Remarques ſur cette Théorie, p. 174
CHAP. IV. *Du mouvement des Fluides élaſtiques*, p. 181
Premiere hypothèſe, ibid.
Seconde hypothèſe, p. 183
Du mouvement d'un Fluide élaſtique dans un vaſe indéfini, p. 185
Du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe donné, ou qui y entre, p. 186
Premiere hypothèſe, p. 188
Seconde hypothèſe, p. 189
Du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſe dilate ou ſe comprime à-la-fois vers les deux côtés differens, p. 192
Régle générale pour déterminer les Loix du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſe meut vers deux côtés à-la-fois, p. 195
De la vîteſſe du ſon, p. 199
CHAP. V. *Du mouvement des Fluides qui coulent dans des Tuyaux fléxibles*, p. 204
Régle générale pour déterminer le mouvement d'un Fluide qui coule dans un vaſe fléxible, élaſtique ou non, p. 209
Avertiſſement, p. 212

LIVRE TROISIÉME.

De la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps.

CHAPITRE. I. *PRINCIPES généraux de la réſiſtance des Fluides*, page 215
De l'action qu'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe, exerce contre ce vaſe, p. 232
De la réſiſtance des Fluides élaſtiques au mouvement des Corps, p. 235
De la réſiſtance des Fluides, en ayant égard à l'adhérence de leurs parties, p. 238
Avertiſſement, p. 239
CHAP. II. *Du mouvement d'un Corps qui s'enfonce dans un Fluide ou eſſai d'une nouvelle Theorie de la réfraction des Corps ſolides*, p. 240
SECTION I. *De la Réfraction du plan circulaire*, p. 241
§. I. *De la Réfraction dans les milieux qui reſiſtent comme le quarré de la vîteſſe*, p. 245
§. II. *Des loix de la Réfraction quand la réſiſtance eſt comme une fonction quelconque de la viteſſe*, p. 277
§. III. *Des loix de la Réfraction, lorſque le mobile eſt peſant*, p. 295
SECTION II. *De la Réfraction de la Sphere*, p. 302
SECTION III. *Remarques ſur le Mémoire de M. de* Mairan, *qui a pour titre :* Recherches Phyſico-Mathé-

matiques sur la réfléxion des Corps, page 319
CHAP. III. *Du mouvement des Corps dans des milieux d'une densité uniforme ou variable*, p. 327
§. I. *Du mouvement d'un parallèlogramme dans un Fluide en repos de densité uniforme*, p. 329
§. II. *Du mouvement d'un plan circulaire, ou d'une Sphere, dans un milieu de densité variable*, p. 344
§. III. *Où l'on résout les Problêmes précédens & quelques autres, dans l'hypothèse que le Fluide soit en mouvement*, p. 362
REMARQUE sur les cas où l'on peut construire les trajectoires dans des milieux résistans, p. 380
REMARQUE où l'on donne une Méthode fort simple pour trouver les trajectoires dans des milieux résistans, p. 383
§. IV. *Du mouvement d'une figure quelconque dans un Fluide*, p. 388
§. V. *Observations sur quelques Problêmes concernant les Fluides*, p. 394
CHAP. IV. *Sur les Fluides qui se meuvent en Tourbillon, & sur le mouvement des Corps plongés dans ces Fluides*, p. 401
SECTION I. *Des Fluides qui se meuvent en Tourbillon*, ib.
Du Tourbillon cylindrique, p. 404
Des Loix du mouvement dans le Tourbillon cylindrique, p. 405
Remarques sur la formule donnée par M. Bernoulli, *pour les vitesses des couches d'un Tourbillon cylin-*

drique, page 408
Du mouvement qu'un cylindre qui tourne autour de ſon Axe, communique à un Fluide qu'on ſuppoſe l'environner, p. 412
Du Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires, p. 416
Du mouvement & de la direction des forces dans un Tourbillon, dont les particules ſont peſantes, p. 427
De la preſſion d'un Tourbillon cylindrique dont l'Axe n'eſt pas horizontal, p. 432
Des Loix du mouvement & de l'équilibre dans le Tourbillon ſphérique, p. 434
SECTION II. *Du mouvement des Corps plongés dans un Tourbillon*, p. 438
De la vîteſſe avec laquelle une maſſe circulaire plongée dans un Tourbillon, peut tourner autour de ſon centre, p. 445
Du mouvement non circulaire d'une Sphere dans un Tourbillon, p. 457
Des cas où l'on peut conſtruire l'Orbite, lorſque la réſiſtance eſt comme la quatrième puiſſance de la vîteſſe, p. 470
Des Orbites décrites par une Sphere dans un milieu qui réſiſte peu, p. 472
Du mouvement d'un Corps dans un Tourbillon non circulaire, p. 475
Additions, p. 476

Fin de la Table des Titres.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 19 Août 1769.

MESSIEURS LE MONNIER & l'Abbé BOSSUT, qui avoient été nommés pour examiner la seconde Edition du *Traité des Fluides* de M. D'ALEMBERT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, le 19 Août 1769.

GRAND-JEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Le Privilége se trouve à la fin du troisiéme Volume des Opuscules Mathématiques *du même Auteur.*

TRAITÉ

TRAITÉ
DE L'ÉQUILIBRE
ET DU MOUVEMENT
DES FLUIDES.

LIVRE PREMIER.

De l'équilibre des Fluides, tant entr'eux qu'avec des Corps ſolides.

CHAPITRE PREMIER.

Loix générales de l'équilibre dans un Fluide dont les parties ſont animées par des Peſanteurs quelconques.

THÉORÊME I.

1. *Si un vaſe de figure quelconque* ABDEC (Fig. 1), *eſt entiérement rempli par un Fluide, & qu'ayant fait à ce vaſe un petit trou* A, *l'on preſſe en cet endroit la ſurface du Fluide, la preſſion ſe répandra également en tout ſens & dans toutes les parties du Fluide, de maniere que tous les points* E, D, &c. *du vaſe ſeront preſſés ſuivant les*

lignes DF, EG, *perpendiculaires à la ſurface* ABC, *avec une force égale à la force qui preſſe en* A.

Cette propoſition doit être regardée comme un Principe d'Expérience, dont tout le monde convient : & la propriété des Fluides dont il s'agit ici, eſt ce que nous connoiſſons de plus certain ſur leur nature.

REMARQUE.

2. J'ai cru ne devoir point donner d'autre définition des Fluides, que celle qui eſt, pour ainſi dire, renfermée dans l'énoncé de ce Théorême. Il me ſemble que nous ne connoiſſons pas aſſez la nature des Fluides, pour en pouvoir donner une notion préciſe : auſſi les définitions que nous en avons eues juſqu'ici, ne paroiſſent pas pouvoir nous conduire à la démonſtration de la propriété des Fluides que nous venons de rapporter. La meilleure & la plus plauſible que je ſçache, eſt celle de M. *Newton* qui définit le Fluide *, *un corps dont les parties cédent à une force quelconque qu'on leur imprime, & ſe meuvent facilement entr'elles en cédant à cette force.* Mais il me ſemble qu'on pourroit n'être pas entiérement ſatisfait de l'uſage que M. *Newton* fait enſuite de cette définition, pour prouver que ſi un Fluide eſt renfermé dans un vaſe quelconque, & qu'il y ſoit comprimé de toutes parts, les parties de ce Fluide ſont également preſſées en tout ſens, abſtraction faite de la peſanteur & de toutes les autres forces accélératrices ou centripétes.

* Princip. l. 2. Sect. V.

M. *Newton* fait voir d'abord, que ſi le vaſe eſt ſphérique, & que le Fluide ſoit comprimé également de tous côtés à ſa ſurface, aucune des parties ne doit ſe mouvoir. Il ſe propoſe enſuite de prouver qu'une partie ſphérique quelconque du Fluide, qui n'a pas le même centre que le vaſe, eſt preſſée également en tous ſes points; voici la raiſon qu'il en apporte : ſi cette partie, dit-il, n'eſt pas également preſſée en tous ſes points, qu'on augmente la preſſion dans l'endroit où elle eſt moindre, juſqu'à ce que la preſſion ſoit égale par-tout, & alors toutes les parties doivent reſter en équilibre; mais, par l'hypothèſe, elles étoient en équilibre avant la nouvelle preſſion ajoutée, & l'addition de cette nouvelle preſſion doit les mouvoir par la définition du Fluide. Elles ſeroient donc tout-à-la-fois en repos & en mouvement; ce qui répugne. Donc &c.

Voici ce qu'on peut, ce me ſemble, objecter à ce raiſonnement. Si la preſſion n'agiſſoit pas ſeulement à la ſurface, comme on le ſuppoſe ici, mais que les particules du Fluide fuſſent toutes animées d'une peſanteur qui les fit tendre vers le centre du vaſe, & qui fut la même à la même diſtance, aſſurément le Fluide ſeroit en équilibre, & néanmoins une partie ſphérique du Fluide, autre que celle qui ont le même centre que le vaſe, ne ſeroit pas également preſſée en tous ſes points. M. *Newton* ſemble même en convenir tacitement, puiſque dans l'énoncé de ſa propoſition il fait abſtraction de toutes forces centripétes. Dans le cas où toutes les particu-

les ſont ſuppoſées peſer vers le centre, une partie ſphérique quelconque reſte en équilibre, non parce que tous les points de la ſurface de cette partie ſont preſſés également, mais parce que chaque point en particulier eſt preſſé en ſens contraires par deux forces égales, comme on le verra dans la ſuite. Il me ſemble cependant, que ſi on vouloit appliquer ici la preuve que nous venons de rapporter de M. *Newton*, on prouveroit que cette partie ſphérique eſt preſſée également dans tous ſes points. Il y a donc au moins de l'obſcurité & de l'inſuffiſance dans la preuve de M. *Newton*, puiſqu'il paroît qu'on pourroit en déduire une propoſition fauſſe.

COROLLLAIRE I.

3. Si outre le trou *A* on fait encore une petite ouverture en *D*, la liqueur preſſée en *A* doit néceſſairement s'échapper par D.

COROLLAIRE II.

4. Si le vaſe *ABC* a des parois flexibles, & que les parties du Fluide ne ſoient animées par aucune autre force, que par celle qui eſt appliquée en *A*, le vaſe *ABC* prendra néceſſairement une forme circulaire. Car on ſçait que ce vaſe *ABC* doit prendre une telle courbure, que le rayon de la développée en un point quelconque, ſoit toujours en raiſon inverſe de la preſſion perpendiculaire en ce point. Donc puiſque la preſſion eſt

égale dans tous les points, il s'enſuit que les rayons de la développée doivent tous être égaux. Donc &c.

COROLLAIRE III.

5. Nous avons vû dans le Cor. I. que la liqueur s'échappera par *D*, ſi on fait en ce point une ouverture. Le ſeul moyen d'empêcher qu'elle ne s'échappe, c'eſt d'appliquer en *D* une preſſion égale à celle qui eſt en *A*. Il en ſeroit de même s'il y avoit une autre ouverture en un point quelconque *E*. Donc en général, quel que ſoit le nombre des ouvertures faites au vaſe, il eſt néceſſaire, pour que le Fluide reſte en équilibre, que les parties de la ſurface du Fluide contigues à toutes ces ouvertures, ſoient également preſſées.

COROLLAIRE IV.

6. Suppoſant que toutes les parties du Fluide contigues au vaſe *ABC* ſoient animées par des forces dirigées ſuivant les Tangentes de la Courbe *ABC*, je dis que ſi on fait à ce vaſe une petite ouverture en un point quelconque *A*, la liqueur s'échappera par cet endroit.

Car 1°. ſi la ſomme de ces forces tangentielles n'eſt pas nulle, c'eſt-à-dire, ſi les forces dans un ſens ne détruiſent pas les forces dans l'autre, il y aura, ſuppoſant le vaſe entiérement fermé, un courant perpétuel de *D* vers *E*, ou de *E* vers *D*, duquel il réſultera (*Art.* 1.) une preſſion contre les parois du vaſe; d'où il s'enſuit, que ſi on fait une ouverture en *A*, la liqueur s'échappe-

ra néceſſairement par-là. 2°. Si les forces de part & d'autre ſe détruiſent, la preſſion de chaque particule réagit contre le vaſe; d'où il eſt clair que le vaſe étant ouvert en *A*, la particule qui répond au trou *A* doit s'échapper.

COROLLAIRE V.

7. Tout le reſte demeurant le même que dans le Cor. précédent, je dis que ſi les particules du Fluide, outre leurs forces tangentielles, ſont animées par des forces perpendiculaires à la ſurface du Fluide, la liqueur ne laiſſera pas de s'échapper toujours par *A*.

Car, ou les particules du Fluide peuvent être en équilibre en vertu des ſeules forces perpendiculaires, & en ce cas on peut faire abſtraction de ces forces, & n'avoir égard qu'à l'effet des forces tangentielles, qui ſera par conſéquent le même que dans le Corol. précédent, puiſque les parois du vaſe ſeront toujours preſſés par l'action des forces tangentielles: ou bien le Fluide ne ſera pas en équilibre en vertu des ſeules forces perpendiculaires, & en ce cas les parois du vaſe ſeront preſſés par l'action des forces perpendiculaires: or ils le ſont auſſi par l'action des forces tangentielles. Donc &c.

COROLLAIRE VI.

8. Si un Fluide eſt contenu dans un vaſe *ABC* fermé de tous côtés, & qu'une particule quelconque *H* de l'intérieur de ce Fluide ſoit preſſée ſuivant une direction quelconque, la preſſion ſe diſtribuera également en tout

ſens & à toutes les parties du Fluide. Car on peut regarder la particule *H* comme étant à la ſurface d'un Fluide qui ſeroit renfermé dans un vaſe quelconque *HNK*. Or, cela poſé, tous les points de *HNK* ſeroient également preſſés (*art.* 1.) & cette preſſion ſe diſtribueroit également en tout ſens à tous les points renfermés entre les deux couches *HNK*, *ABC*. Donc &c.

COROL. VII.

9. Donc un Fluide ne peut être en équilibre, à moins que chacune de ſes parties ne ſoit preſſée également de tous les côtés.

THÉORÊME II.

10. *Si une liqueur dont les parties ſont animées par des forces quelconques, eſt en équilibre, la direction de la preſſion doit être perpendiculaire à tous les points de ſa ſurface.*

Car la liqueur (*hyp.*) étant en équilibre, ſi on l'imagine renfermée dans un vaſe de tous côtés, & qu'on faſſe à ce vaſe tant d'ouvertures qu'on voudra, il eſt clair qu'elle reſtera encore en équilibre. Or ſi les particules de la ſurface du Fluide étoient animées par des forces tangentielles, outre leurs forces perpendiculaires, le Fluide renfermé en cet état dans le vaſe, devroit (*art.* 7.) s'échapper par les ouvertures faites au vaſe. Donc il n'y ſeroit point en équilibre. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

11. Donc une liqueur quelconque dont les particules

ſont animées par la peſanteur naturelle qui anime tous les Corps terreſtres, doit toujours ſe mettre de niveau, c'eſt-à-dire, ſe diſpoſer de maniere que ſa ſurface ſoit parallèle à l'horizon. C'eſt auſſi ce que l'Expérience vérifie.

COROL. II.

12. Donc ſi une liqueur eſt compoſée de parties qui peſent toutes vers un même centre, la ſurface de cette liqueur doit être circulaire ou ſphérique, pour que le Fluide ſoit en équilibre.

SCOLIE.

13. On prouve ordinairement de deux manieres la propoſition que nous venons de démontrer.

La premiere conſiſte à faire voir, que ſi la preſſion n'étoit pas dirigée perpendiculairement à la ſurface, on pourroit la décompoſer en deux autres, l'une perpendiculaire à la ſurface, l'autre tangente à cette même ſurface, & ſuivant laquelle le Fluide ne manqueroit pas de s'écouler comme ſur un plan incliné; ce qui romproit l'équilibre.

Cette démonſtration, qui d'abord paroît ſuffiſante, n'eſt peut-être pas aſſez rigoureuſe. En effet, ſuppoſons pour un moment qu'une liqueur peſante *DGBC* (Figure 2.) ſoit contenue dans un vaſe incliné *ABCH*. Dira-t-on que cette liqueur ne peut ſe ſoutenir dans cet état, parce que ſes particules *E*, *F*, tendent à couler vers *G*? Mais on voit bien que cette tendance ne ſuffit pas; car ſi on ſuppoſe

poſe que ces particules ſoient toutes diſpoſées en ligne droite, & tendent toutes à ſe mouvoir ſuivant cette ligne, il eſt évident qu'abſtraction faite de la propriété des Fluides, le point *G* doit en ſoutenir l'effort. C'eſt auſſi ce qui arriveroit, ſi les particules du Fluide étoient de petites boules ſolides & égales, dont les centres fuſſent rangés dans la droite *DG*. On dira peut-être que les particules du Fluide ne ſont pas de petites boules égales, & dont les centres ſoient rangés en ligne droite. Mais, comme nous ignorons entiérement la nature des Fluides, ce ſeul cas d'exception paroît toujours ſuffiſant pour infirmer la preuve que nous examinons ici, & pour nous convaincre que c'eſt dans quelque propriété particuliere aux Fluides, & déduite de l'expérience, qu'il faut chercher la démonſtration de la propoſition dont il s'agit.

Ainſi dans le cas préſent, il eſt aiſé de faire voir que la liqueur *GDCB* ne peut reſter en équilibre dans le vaſe *AbCH*, ſi ſa ſurface *GD* n'eſt pas de niveau. Car imaginant la liqueur *GDCB* renfermée de tous côtés dans un vaſe qui n'ait qu'un ſeul trou *E*, il eſt viſible que ſi la ſurface n'eſt pas de niveau, la liqueur *E* preſſée ſuivant *EG*, doit néceſſairement s'échapper par le trou *E*. Donc &c.

La ſeconde maniere de prouver qu'un Fluide doit ſe mettre de niveau, eſt de faire voir que le centre de gravité d'une maſſe Fluide *CDFE* (Figure 3.) ſuppoſée de niveau, eſt plus bas que celui d'une maſſe quelconque *HGKFE* égale à la maſſe *CDFE*. Or, comme le cen-

tre de gravité d'un ſyſtême de Corps qui ſont en équilibre, doit être le plus bas qu'il eſt poſſible, on conclud qu'un Fluide ne ſçauroit être en équilibre, ſi ſa ſurface n'eſt pas de niveau, &c.

Il me ſemble que cette ſeconde preuve eſt encore inſuffiſante. Car 1°. ſoit un vaſe rectangle *ABCH*, (Fig. 2.) dont le fond *BC* ſoit incliné à l'horizon, & rempli de petites boules dont les centres ſoient dans des droites *DG* parallèles à *CB*; il eſt évident que ces boules en cet état ſeront en équilibre : leur centre de gravité n'eſt pas néanmoins le plus bas qu'il eſt poſſible. 2°. Je ne vois pas comment on employeroit ce Principe, pour démontrer qu'un Fluide dont les parties ſont animées par des forces quelconques, & dont la ſurface eſt Courbe, ſe diſpoſe de maniere que la direction de la peſanteur ſoit perpendiculaire à tous les points de ſa ſurface : il ne paroît pas en effet qu'il puiſſe s'appliquer à un autre cas, qu'à celui où la peſanteur eſt la même pour toutes les particules, & où elle a une direction conſtante. Car, quand on dit que le centre de gravité d'un ſyſtême de Corps qui ſont en équilibre, eſt le plus bas qu'il eſt poſſible, on entend par le mot de *centre de gravité*, ou *le centre de maſſe*, ou bien *le centre de gravité* proprement dit *. Or ſi l'Arc circulaire $a\mathcal{C}$ (Figure 3.) eſt la ſurface d'une liqueur dont toutes les parties peſent vers le centre *Q* de cet Arc, il eſt conſtant que la liqueur ſera en équilibre,

* Voyez l'art. 51 *du Traité de Dynamique*, premiere Edition, 1743; & l'art. 62 de la ſeconde Edition, 1758.

& que néanmoins le *centre de maſſe* du Fluide à ſurface circulaire $\alpha \mathcal{C} FE$, ne ſera point le plus bas qu'il ſera poſſible : en effet, il eſt aiſé de faire voir que ſi la maſſe Fluide $\alpha \mathcal{C} FE$ avoit une ſurface plane, auquel cas (*art.* 12.) elle ne ſeroit pas en équilibre, ſon centre de maſſe ſeroit plus près du point Q, que quand la ſurface du Fluide eſt circulaire. A l'égard du *centre de gravité* proprement dit, on peut démontrer qu'il n'eſt pas toujours le plus bas qu'il eſt poſſible. Car ſoit (Figure 4.) dans un vaſe rectangulaire $ADEB$, un Fluide circulaire $FOSPK$, dont les parties peſent vers le centre Q du Cercle, & ſoit ſuppoſée la largeur du vaſe DE telle, que $DE \times 2QC$ ſoit égale à l'Aire $FOSPK$. Il eſt conſtant que le centre de gravité d'une maſſe Fluide qui rempliroit l'eſpace $MDEN = DE \times 2QC = FOSPK$, ſeroit au point Q; au lieu que le centre de gravité de la maſſe $FOSPK$ eſt au-deſſus de Q. Donc la maſſe de Fluide $FOSPK$, qui eſt en équilibre, n'a pas ſon centre de gravité auſſi près du point de tendance Q, que le centre de gravité d'une maſſe égale de Fluide $MDEN$, dont la ſurface eſt plane, & qui par conſéquent (*art.* 12.) n'eſt pas en équilibre. Donc &c.

Cette vérité eſt préſentée d'une maniere encore plus frappante dans la ſeconde Edition de notre *Traité de Dynamique*, pag. 95.

CHAPITRE II.

De l'équilibre d'un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur dont la direction eſt conſtante.

THÉORÊME III.

14. *Si un vaſe de figure quelconque* ACDEB (Fig. 5.) *eſt rempli d'une liqueur dont la ſurface* AB *ſoit horizontale, & qu'ayant imaginé cette liqueur diviſée en tranches horizontales* ab, αϐ, *on ſuppoſe que toutes les parties de chaque tranche ſoient preſſées verticalement par une force accélératrice repréſentée par les ordonnées correſpondantes* Gg, Ff, &c. *de la Courbe* gfh; *je dis,*

1°. *Que la preſſion de la liqueur ſur le fond du vaſe* DE *ſera en raiſon compoſée de la baſe* DE, *& de l'Aire curviligne* GghH.

2°. *Que ſi le vaſe eſt ſoutenu par une puiſſance* P, *cette puiſſance ne ſupportera qu'une réſiſtance égale au poids total de la liqueur contenue dans le vaſe.*

Démonſtration de la premiere Partie.

Imaginons d'abord qu'il n'y ait que la ſeule tranche *AB* dont les parties ſoient peſantes, il eſt clair (*Art.* 1.) que la preſſion des particules de cette tranche ſe communiquera à la tranche voiſine & immédiatement inférieure, de maniere que toutes les parties de cette ſe-

conde tranche ſeront animées d'une preſſion égale à celle de AB; ſi cette ſeconde tranche eſt outre cela animée d'une peſanteur particuliere, il eſt évident que toutes les parties de la troiſiéme tranche ſeront chargées d'une preſſion égale à la ſomme des peſanteurs des deux premieres, & ainſi de ſuite. Donc la preſſion contre le fond DE ſera en raiſon compoſée du nombre des parties qui couvrent ce fond, & de la ſomme des forces accélératrices de chaque tranche, c'eſt-à-dire, en raiſon compoſée de DE, & de l'Aire $GghH.CeQ.F.1^{o}.D.$

Démonſtration de la ſeconde Partie.

Il eſt clair que le petit côté $a\alpha$ du vaſe eſt preſſé perpendiculairement ſuivant aZ (*Art.* 1.) avec une force égale à celle qui preſſe les particules de la tranche ab; & comme cette derniere force eſt repréſentée par l'Aire $FGgf$, il s'enſuit que l'effort contre $a\alpha$ eſt égal à $a\alpha \times FGgf$; & l'effort qui en réſulte pour pouſſer le point a ſuivant aO, ſera égal à $\frac{a\alpha.FGgf \times \alpha m}{a\alpha} =$ $FGgf \times \alpha m$. On trouvera de même que l'effort qui tend à pouſſer le point C ſuivant $C\omega$, eſt $c\mu \times GgqQ = \alpha m \times GgqQ$; donc la différence de ces deux efforts, ou la force qui en réſulte pour pouſſer le point C en embas, eſt $\alpha\mu \times FfqQ$, c'eſt-à-dire, égale au poids de la liqueur contenue dans la petite colomne $a\alpha cC$. Donc en général, ſi on imagine une colomne de Fluide verticale infiniment mince, terminée par les ſurfaces AB

& DE (prolongées hors du vaſe s'il eſt néceſſaire), il eſt clair que l'effort avec lequel la portion de Fluide renfermée dans cette colomne tend à pouſſer le vaſe en embas, eſt toujours proportionnel au poids de cette portion de Fluide. Donc l'effort total du Fluide pour faire deſcendre le vaſe, eſt proportionnel au poids total du Fluide contenu dans ce vaſe. Donc &c. *Ce Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE I.

15. La force qui tend à mouvoir le point a ſuivant ba, eſt proportionnelle à $am \times GgFf$, & par conſéquent égale à celle qui tend à mouvoir le point b ſuivant ab. De plus, il eſt évident que la force réſultante des efforts des particules du Fluide pour faire deſcendre le vaſe, paſſera par la même ligne verticale par laquelle paſſe le centre de gravité proprement dit de la Liqueur.

COROL. II.

16. L'action du Fluide contre le fond DE ſera préciſément la même, toutes choſes d'ailleurs égales, que celle du Fluide qui ſeroit contenu dans un vaſe rectangulaire $DELI$ de même baſe & de même hauteur, puiſque la preſſion contre le fond DE eſt évidemment égale dans ce dernier cas au poids de la liqueur, c'eſt-à-dire, à $DE \times GghH$.

Donc ſi le fond DE étoit mobile, il faudroit pour ſoutenir ce fond contre l'effort du Fluide, une puiſſance égale au poids du rectangle de liqueur $DELI$, au lieu

que si le fond *DE* est immobile & adhérent au vase *AaDEbB*, il faut pour soutenir ce vase, une puissance égale au poids de la liqueur contenue dans le vase *AaDEbB*.

Scolie I.

17. La démonstration que j'ai donnée de la premiere Partie du Théorême précédent, est parfaitement analogue à celle que M. *Newton* a donnée dans ses Principes, Livre II, Prop. XX, sur la quantité de pression que soutient un vase chargé d'un Fluide sphérique ; j'avoue qu'après y avoir bien pensé, cette démonstration m'a paru préférable à toutes les autres.

Scolie II.

18. On démontre ordinairement la premiere Partie de notre Théorême, dans le cas où le vase *ADEB* (Fig. 6.) est plus étroit en haut qu'en bas, en supposant que les côtés *AD*, *BE*, sont pressés par le Fluide qui tend à s'élever vers *AB*, & que la pression que soutient, par exemple, la petite portion *aα* du vase, se communique par la réaction au point *O* du fond. Mais 1°. il faudroit avoir démontré auparavant, que la quantité de la pression perpendiculaire à *aα*, est comme *aα* multiplié par *aS*, ce que négligent de prouver la plûpart de ceux qui démontrent par ce Principe la proposition dont il s'agit. 2°. Quand ce Principe, vrai en lui-même, auroit été prouvé, comment la résistance purement passive des côtés

du vaſe, peut-elle produire ſur le point *O* une preſſion réelle? On dira peut-être que le point *O* eſt preſſé, comme il le ſeroit par la colomne *OS*; parce qu'en imaginant que les parties *IAD*, *BLE* du Fluide contenu dans le rectangle *LEDI*, viennent à ſe geler tout-à-coup, le reſte du Fluide demeurera comprimé comme auparavant : à cela il y a une réponſe à faire. Si au lieu de ſuppoſer que les parties *ADI*, *BLE* ſe gelent, on ſuppoſe que ce ſoit la partie *LITV*, il eſt conſtant que le fond *DE* ne portera plus que le poids du Fluide *DTVE*. Il n'eſt donc pas vrai de dire en général, que ſi une partie quelconque du Fluide ſe gele, le fond du vaſe ſupportera toujours la même preſſion qu'il ſupportoit d'abord. Donc dans l'hypothèſe que les parties *IAD*, *BLE* ſe gelent, on ne voit pas clairement, ce me ſemble, que le fond *DE* ſera preſſé comme auparavant; & cette vérité a beſoin de démonſtration.

Corol. III.

19. Il réſulte du Théorême précédent, qu'une partie quelconque $a\alpha$ de la ſurface du vaſe *ACDEB* (Fig. 5.) eſt preſſée perpendiculairement ſuivant aZ, avec une force proportionnelle à $a\alpha \times FfgG$, c'eſt-à-dire, au poids d'un Cylindre, qui auroit $a\alpha$ pour baſe horizontale, *GF* pour hauteur, & dont les différentes tranches ſeroient animées par une peſanteur proportionnelle à l'Ordonnée correſpondante de la Courbe *gfh*.

Corol.

COROL. IV.

20. Si un Syphon ou Tuyau recourbé eſt rempli d'une liqueur *EFKab*, (Fig. 7.) dont les ſurfaces *EF*, *ab*, ſoient de niveau chacune en particulier, & que les peſanteurs des différentes tranches *ab*, *ef*, *NO* &c. de la partie *abNO*, ſoient repréſentées par les Ordonnées *CD*, *Gd*, *PQ* &c. de la Courbe *DdQ*; les peſanteurs des différentes tranches de la partie *EFnO*, par les Ordonnées *HG*, *PR* &c. de la Courbe *HR*; enfin les peſanteurs des différentes tranches de la partie *NnK* par des Ordonnées *pq* ou *pu* qui ſoient égales dans l'une & l'autre Courbe; je dis que le Fluide ſera en équilibre, ſi l'Aire *CDQP* = l'Aire *HGPR*. Car ſi on imagine un plan impénétrable *OK* qui ſépare le Fluide en deux parties, il eſt évident qu'un point quelconque *r* de ce plan eſt preſſé ſuivant *rm* par l'action du Fluide *abNOr*, avec une force proportionnelle à l'Aire *CDdQqpC*; & que le même point *r* eſt pouſſé ſuivant *rM* par l'action du Fluide *FEnOr*, avec une force proportionnelle à l'Aire *GHRupG*; or, pour que le Fluide ſoit en équilibre, il faut que ces deux forces ſoient égales, & par conſéquent que *CDdQqpC* = *GHRupG*. Donc puiſque (*hyp.*) *QqpP* = *RupP*, il eſt clair que *CDQP* = *HGPR*.

De-là il s'enſuit, que ſi la liqueur *EFKab* eſt une liqueur homogene, dont toutes les parties ſoient animées par une même peſanteur, les ſurfaces *EF*, *ab*, doivent

être à hauteur égale dans les deux branches, pour qu'il y ait équilibre. Car alors les Courbes HR, DdQ deviennent des droites parallèles à CP, & l'on a $CD = HG$. Donc les Aires $CDQP$, $HGPR$, ne ſçauroient être égales, à moins que GP ne ſoit égale à CP : donc EF, ab, ſeront à la même hauteur.

SCOLIE. III.

21. Le Principe de Deſcartes, pour expliquer l'équilibre d'une liqueur dans un Syphon, conſiſte à faire voir que ſi on ſuppoſe le Fluide à la même hauteur dans les deux branches, il ne pourroit deſcendre dans une des branches & monter dans l'autre, ſans que les quantités de mouvement fuſſent égales dans la partie de Fluide qui monteroit & dans celle qui deſcenderoit; d'où cet Auteur conclud qu'il y a équilibre entre les deux Tranches, quand elles ſont à même hauteur. Ce Principe eſt analogue à celui dont ce même Philoſophe s'eſt ſervi pour démontrer l'équilibre ſur le Levier; & quoiqu'on ne démontre par ce moyen l'équilibre qu'indirectement, il faut néanmoins avouer que ce Principe a l'avantage d'être général, ſoit pour l'équilibre des Fluides, ſoit pour celui des Corps ſolides : auſſi n'eſt-il autre choſe que cette Loi de Méchanique, que des puiſſances ſont en équilibre, quand elles ſont entr'elles en raiſon inverſe de leurs vîteſſes, eſtimées ſuivant la direction de ces puiſſances; Loi d'où dépend celle de la conſervation des forces vives, comme je l'ai prouvé dans ma Dynamique.

M. *Daniel Bernoulli* démontre dans ſon Hydrodynamique, que le Fluide doit ſe mettre à même hauteur dans les deux branches, parce qu'en cet état ſon centre de gravité eſt le plus bas qu'il eſt poſſible. Cette démonſtration, quoiqu'analogue à celle dont on ſe ſert communément pour prouver le niveau des Fluides, & dont nous avons fait mention (*art.* 13.) eſt aſſurément ingénieuſe. Mais ſans nous arrêter ici à faire ſur cette preuve de M. *Bernoulli* des remarques analogues à celles que nous avons faites (*art.* 13.) ſur un cas ſemblable, nous nous contenterons d'obſerver que ce Principe, ainſi que celui de M. *Deſcartes*, eſt plutôt une Loi ſecondaire & une propriété de l'équilibre, que la Loi fondamentale de l'équilibre même.

De l'équilibre d'un Fluide renfermé dans un vaſe ouvert par en haut & par en bas.

THÉORÊME IV.

22. *Soit un vaſe quelconque indéfini* POTQ (Fig. 8.) *dont la partie* ADCZ, *terminée par les parallèles* AD, ZC, *ſoit remplie de Fluide. Soit imaginé ce Fluide diviſé en tranches* FKG *parallèles à* AD, *& que tous les points de chaque tranche ſoient animés par une force accélératrice repréſentée par l'Ordonnée correſpondante* kf *de la Courbe* dfb, *les Ordonnées* ad *repréſentant les forces accélératrices poſitives, c'eſt-à-dire, celles qui tendent de* L *vers B, & les Ordonnées* kf, *celles dont la direction eſt en ſens contraire. Je dis que le Fluide en cet état ne peut être en*

équilibre, à moins que l'Aire a d n m o b c *ne ſoit zero; c'eſt-à-dire, la ſomme des Aires poſitives égale à la ſomme des négatives.*

Car, ſuppoſons que le vaſe ſoit terminé par un fond immobile ZC, la preſſion de ce fond ſera = ZC × *adnmobc.* Donc ſi l'Aire *adnmobc* n'étoit pas = 0, ce fond ſouffriroit une certaine preſſion; par conſéquent ſi on l'imaginoit anéanti, le Fluide deſcendroit néceſſairement, & ne ſeroit plus en équilibre; ce qui eſt contre l'hypothèſe. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

J'ai démontré cette propoſition d'une autre maniere, *art.* 173 de ma Dynamique, premiere Edition; & *art.* 205 de la ſeconde.

COROLLAIRE I.

23. 1°. Si on mene les lignes *ZH*, *CE*, parallèles à *LB*, l'effort du Fluide contre les parois du vaſe, ſera égal au poids du Fluide contenu dans les eſpaces *AHZ*, *DCE*. Cela ſe démontre comme la ſeconde Partie du Théor. 3.

2°. En général, un point quelconque *G* du vaſe eſt preſſé perpendiculairement avec une force proportionnelle à l'Aire *adin — nfk.*

COROL. II.

24. Il ne ſuffit pas, pour qu'il y ait équilibre, que l'Aire *adnmobc* ſoit zero; il faut encore, 1°. que la force qui anime la ſurface *AD*, tende de *L* vers *B*, & que celle

qui anime ZC, tende de B vers L : ce qui eſt évident. 2°. il faut que l'Aire $adnmobc$ qui commence & qui finit par zero, & dont les différentes parties $adin$ expriment les preſſions des tranches FG correſpondantes, n'ait aucune partie exprimée négativement, c'eſt-à-dire, qu'il n'y ait aucun point où la ſomme des Aires négatives ſurpaſſe la ſomme des Aires poſitives. Car alors une des tranches ſeroit plus preſſée vers le haut que vers le bas, & l'équilibre ſeroit rompu. Cette ſeconde condition renferme la premiere, comme on peut le voir aiſément. Ces deux remarques nous ſeront d'un grand uſage dans la Théorie du mouvement des Fluides.

COROL. III.

25. Si on nomme φ la force accélératrice indéterminée de chaque tranche, LK, x, on aura en faiſant $LK = LB$, $\int \varphi\, dx = 0$. Donc ſi dv eſt la petite vîteſſe, qui dans un temps conſtant dt ſeroit proportionnelle à la force accélératrice φ, on aura $\frac{\int dv\, dx}{dt} = 0$, ou ſimplement $\int dv\, dx = 0$.

COROL. IV.

26. Si on décrit la Courbe $exhrs$ (Fig. 9 & 10.) dont les Ordonnées qx, tu, &c. ſoient proportionnelles aux Aires correſpondantes $adin$, $adinfk$, &c. Il eſt clair, 1°. que cette Courbe coupera ſon Axe en e & en s. 2°. Qu'elle ſera parallèle à ſon Axe dans les endroits

x, h, r &c. qui répondent aux endroits n, m, o, où la Courbe $adin$ coupe le ſien. 3°. Qu'il y aura équilibre, ſi toutes les Ordonnées qx, tu, lh &c. ſont d'un même côté de es comme dans la Figure 9. 4°. Au contraire, qu'il n'y aura point équilibre, ſi toutes ces Ordonnées ne ſont point d'un même côté (Fig. 10.), au moins en ſuppoſant que les particules du Fluide n'ayent aucune tenacité entr'elles. 5°. Que ſi dans ce dernier cas on ſuppoſe le Fluide $ADCZ$ (Fig. 10.) renfermé dans le vaſe de toutes parts, c'eſt-à-dire, qu'il y ait un fond immobile en AD & un autre en CZ, le fond ſupérieur AD ſera preſſé avec une force égale à la plus grande lh de toutes les Ordonnées négatives que peut avoir la Courbe, & que le fond inférieur CZ ſouffrira la même preſſion. 6°. En général, ſi le vaſe eſt fermé de toutes parts, alors, ſoit que l'Aire $adinfmzobc$ ſoit zero ou non, le fond AD ſera toujours preſſé avec une force proportionnelle à la plus grande lh de toutes les Ordonnées négatives; & la preſſion que ſouffriroit l'autre fond; ſi, par exemple, ce fond étoit en VN, ſeroit proportionnelle à l'Ordonnée φy. Tout cela étant aiſé à voir avec un peu d'attention, nous ne nous arrêterons pas à l'expliquer plus en détail.

Nous examinerons plus bas (*art.* 43 *& ſuiv.*) quelles doivent être les loix de la preſſion, lorſque les parties des Fluides ſont ſuppoſées avoir de la tenacité entr'elles.

Au reſte, il eſt bon de remarquer que, quand même la preſſion exercée par le Fluide ſur les fonds AD & CZ ſeroit $= 0$, le poids total du Fluide pourroit ne pas être

$= 0$; & l'on a vû ci-deſſus (*art.* 16.) qu'il faudroit alors, pour ſoutenir le vaſe, une puiſſance égale au poids du Fluide.

De l'équilibre des Fluides avec les ſolides qui y ſont plongés.

THÉORÊME V.

27. *Soit un Fluide* ABDE (Fig. 11.) *dont les parties ſoient animées par des peſanteurs de directions conſtantes, & dans lequel toutes les parties d'une même tranche horizontale* AB, ab &c. *ſoient animées par la même peſanteur: ſi on ſuppoſe qu'une partie quelconque renfermée par la ſurface quelconque* KPZ *vienne à ſe durcir tout-à-coup, ſes parties conſervant néanmoins la même peſanteur qu'auparavant; je dis que l'équilibre n'en ſera point troublé.*

Car par la même méthode, par laquelle on a fait voir (*art.* 14.) que le vaſe *ABDE* étoit pouſſé en embas par une force égale au poids du Fluide qu'il contenoit, on prouvera que le Corps *KPZ* eſt pouſſé en enhaut par une force égale au poids du volume de Fluide dont il occupe la place, & que la direction de cette force paſſe par le centre de gravité proprement dit du Corps *KPZ*. Mais par l'hypothèſe, le Corps *KPZ* tend à deſcendre avec une force égale au poids de ce même volume de Fluide. Donc ces deux forces ſont égales & contraires: donc le Fluide & le Corps reſteront en repos.

COROLLAIRE I.

28. La même propoſition ſeroit encore vraie, quand

on ne ſuppoſeroit pas que toutes les parties du Corps *KPZ* conſervaſſent la même peſanteur qu'elles avoient étant Fluides, pourvû que la peſanteur totale de la maſſe *KPZ* fut la même que celle qu'elle avoit, & que le centre de gravité de cette maſſe ſe trouvât dans la même ligne verticale, par laquelle ſon centre de gravité paſſoit auparavant.

Corol. II.

29. Donc un Corps ne peut reſter en équilibre dans un Fluide tel que nous venons de le décrire, à moins que ſon poids ne ſoit égal à celui du volume de Fluide dont il occupe la place, & que ſon centre de gravité proprement dit, ne ſoit dans la même ligne verticale avec le centre de gravité de ce volume de Fluide.

Corol. III.

30. Si le Corps n'eſt plongé qu'en partie dans le Fluide, il faut, pour qu'il reſte en équilibre, que ſon poids total ſoit le même que celui du volume de Fluide égal à la partie plongée; & que le centre de gravité du Corps ſoit dans la même ligne verticale, dans laquelle auroit été le centre de gravité du volume de Fluide dont la partie ſubmergée du Corps occupe la place.

Corol. IV.

31. De-là on voit qu'un Corps moins peſant qu'un égal volume d'eau doit s'y enfoncer, juſqu'à ce que ſa partie ſubmergée occupe la place d'un volume d'eau auſſi peſant

ſant que le Corps entier : & que de plus, il doit s'y diſpoſer de maniere que le centre de maſſe de la partie ſubmergée & celui de la partie non ſubmergée ſoient dans une même ligne verticale; car le centre de maſſe ſe confond alors avec le centre de gravité.

COROL. V.

32. Donc, pour trouver la ſituation que doit prendre un Corps poſé ſur un Fluide, dont la peſanteur ſpécifique eſt à celle du Corps comme *m* à *n*, il faut réſoudre ce Problême de Géométrie : *un Corps* C R S (Fig. 12.) *de figure quelconque étant donné, le diviſer en deux parties* C R S, R r S, *qui ſoient entr'elles comme* m — n *à* n, *& dont les centres de gravité* K, V, *ſoient dans une droite* KV *perpendiculaire à la ligne* R S *qui ſépare ces deux parties;* ou, ce qui revient au même, *trouver la partie* R r S *qui ſoit au Corps entier comme* n *à* m, *& dont le centre de gravité* V *ſoit avec le centre de gravité* G *de la figure entiere dans une même ligne* GV *perpendiculaire à* R S.

COROL. VI.

33. La ligne *GV* étant perpendiculaire à *RS*, je dis que la diſtance entre les centres de gravité *G*, *V*, eſt la plus petite qu'il eſt poſſible. Car, ſoit la partie *rSs* égale à *RrS*, les lignes ou plans *RS*, *rs* faiſant un angle infiniment petit; pour trouver le centre de gravité de *rSs*, il faut d'abord chercher celui de la petite partie *Rpr*, qu'on pourra ſuppoſer en *q* ſur la ligne *pR*, puis faire *qV* : *Vi* :: *RrS* : *Rpr*, pour avoir le centre de gravité *i*

de la partie rpS; enſuite ſuppoſant que t ſoit le centre de gravité de Sps, on fera $tu : ui :: Sps$ ou Rpr qui lui eſt égale, eſt à RrS; & l'on aura le centre de gravité u de rSs. Donc $tu : ui :: qV : Vi$; d'où l'on voit que Vu eſt parallèle à RS, & par conſéquent perpendiculaire à GV: donc Gu eſt plus grande que GV, & n'en différe que d'un infiniment petit du ſecond ordre; & par conſéquent GV eſt un *minimum*.

COROL. VII.

34. Si ſur la ſurface KB (Fig. 13.) d'une eau ſtagnante, on place dans quelque ſituation que ce ſoit, un Corps dont la denſité ſoit plus grande que celle d'un égal volume d'eau; que V ſoit le centre de maſſe de la partie enfoncée RQS, K le centre de la maſſe de la partie RCS, G le centre de maſſe du Corps entier, je dis que le point par lequel il faudroit ſuſpendre ou ſoutenir le Corps pour qu'il reſtât en équilibre, ſeroit le centre de maſſe qu'auroit ce Corps, ſi ſa partie RCS reſtant la même, ſa partie RQS devenoit d'une denſité égale à la différence des denſités du Corps & du Fluide. Car l'effort du Fluide pour faire monter le Corps, peut être regardé comme réduit au centre V (*art.* 27.); & ſi on nomme m & n les denſités du Fluide & du Corps, & que L ſoit le point de ſuſpenſion, on aura $RQS \times m \times LO = CQS \times n \times LZ$. Donc $RQS.m.VL = CQS.n.LG = n(RQS.VL - CRS.LK)$. Donc $RQS \times [n - m] : CRS \times n :: KL : VL$. Donc &c.

SCOLIE.

35. Quoique le point *L* ſoit dans l'hypotèſe précédente, le centre de gravité proprement dit du Corps *CRS*, tant que ce Corps demeure plongé dans l'eau, il faut néanmoins bien ſe garder de croire, que ſi ce Corps étoit abandonné à lui-même, il lui arrivât les mêmes choſes que s'il étoit réellement compoſé de deux parties, dont la denſité & la peſanteur ſpécifique fuſſent différentes. C'eſt une erreur dans laquelle d'habiles Phyſiciens ſont tombés, & dont nous aurons lieu de parler dans la ſuite. Voyez plus bas, *art.* 419.

Si la ligne *GV* n'eſt pas perpendiculaire à *RS*, les parties *CRS*, *RrS* étant entr'elles comme $m - n$ eſt à n, le Corps doit faire des oſcillations juſqu'à ce qu'il arrive à une ſituation où les deux conditions énoncées dans l'article 32 ſoient obſervées. Dans notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, 1752, pag. 143 & ſuivantes, nous avons donné une méthode pour déterminer ces oſcillations, & nous avons perfectionné cette méthode dans le 1er vol. de nos *Opuſc. Math.* 1761, 3e Mém. On y trouvera des remarques curieuſes & importantes ſur cet objet, principalement par rapport aux cas où les oſcillations doivent être très-grandes ou très-petites.

De la Loi de la preſſion dans les différentes couches d'un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur de direction conſtante.

THÉORÊME VI.

36. *Si les différentes parties d'un Fluide* A B C D

(Fig. 14.) *renfermé dans un vaſe, ſont animées par une peſanteur dont la direction ſoit conſtante; je dis qu'il eſt néceſſaire pour l'équilibre, que toutes les parties d'une même tranche horizontale* AB, ab, &c. *ſoient animées par une peſanteur égale.*

1°. La peſanteur doit être égale dans toutes les parties qui ſont à la ſurface *AB*. Car imaginons la ligne *ab* infiniment proche de *AB*, & ſuppoſons que cette ligne ſoit une ſurface ſolide qui ſépare la partie *ABba* du reſte du Fluide. Il eſt évident que cette partie *ABba* ne peut reſter en équilibre, ſi la preſſion n'eſt pas égale par-tout. Suppoſons préſentement que la ſurface ſolide *ab* ſoit anéantie; nous venons de voir que la partie de Fluide *ABba* conſidérée comme ſeule, ne pouvoit reſter en équilibre: or le Fluide inférieur, quelle que ſoit la peſanteur qui anime ſes parties, ne peut réſiſter à l'effort que font les parties *ABba* pour ſe mouvoir; donc l'équilibre ſera rompu. Donc il eſt néceſſaire, pour qu'il y ait équilibre, que toutes les parties de la ſurface *AB* ſoient animées par une peſanteur égale.

2°. Puiſque toutes les parties de la ſurface *AB*, ou ce qui eſt la même choſe, de la petite portion de Fluide *ABba* ſont également preſſées, il eſt clair que cette partie *ABba* conſidérée comme ſeule reſteroit en équilibre; & qu'ainſi, abſtraction faite de la partie *ABba*, le reſte du Fluide *abDC* doit auſſi demeurer en équilibre: donc la peſanteur doit être égale dans tous les points de la ſurface *ab* de cette partie *abDC*, & on prouvera

par la même méthode, que la pesanteur doit être égale dans tous les points de chaque tranche horizontale, quoiqu'elle puisse varier d'une tranche à l'autre. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

De l'équilibre de différens Fluides entr'eux.

THÉORÊME VII.

37. *La pesanteur étant supposée constante & de direction donnée, des liquides de différente densité renfermés dans un même vase ne peuvent être en équilibre, à moins que les surfaces communes qui les séparent ne soient de niveau; ou, ce qui revient au même, toutes les parties d'une même tranche horizontale doivent avoir une même densité.*

1°. Toutes les parties de la surface *AB* ou de l'espace *ABba*, dans lesquelles on suppose la pesanteur égale, doivent avoir la même densité. Car il est clair qu'ayant toutes la même densité, elles seroient en équilibre : or, cela posé, si on augmentoit la densité dans certaines parties sans l'augmenter également dans les autres, ce seroit augmenter la pression dans certains endroits, sans l'augmenter également par-tout; ce qui ne pourroit manquer de rompre l'équilibre (*art. 36.*)

2°. Ayant fait voir que toutes les parties du Fluide *ABba* considéré comme isolé, doivent avoir une densité égale, on prouvera, comme on l'a fait *art. 36*, n. 2, que toutes les autres tranches horizontales doivent être composées de parties d'une égale densité.

COROLLAIRE I.

38. Si deux liqueurs différentes ſont en équilibre dans les deux branches d'un Syphon, elles doivent s'y diſpoſer, de maniere que la ſurface commune qui ſépare ces deux liqueurs, ſoit de niveau.

COROL. II.

39. Tout ce que nous avons dit dans les propoſitions précédentes ſur la preſſion d'un Fluide homogene, peut s'appliquer auſſi à la preſſion d'un Fluide hétérogene, pourvû que les lignes Gg, Ff, Qq &c. (Fig. 5.) qui dans ces propoſitions repréſentoient les forces accélératrices des tranches correſpondantes, ſoient ſuppoſées ici proportionnelles au produit de la force accélératrice de chaque tranche & de ſa denſité.

Ainſi on voit que la peſanteur étant ſuppoſée conſtante, deux liqueurs différentes doivent ſe diſpoſer de telle maniere dans les branches d'un Syphon (Fig. 7.), que la hauteur de chacune au-deſſus de la ſurface commune qui les ſépare, ſoit en raiſon inverſe de ſa denſité. Car alors les Courbes HR, DdQ deviendront des droites parallèles à CP, & les lignes HG, CD ſeront entr'elles comme les denſités des deux liqueurs. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut (*art.* 20.) que $HG \times GP = CD \times CP$. Donc $GP : CP :: CD : HG$.

CHAPITRE III.

Examen de différentes queſtions qu'on peut propoſer ſur l'équilibre des Fluides.

§. I. De la Loi de la peſanteur & de la denſité dans les différentes tranches d'un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur de direction conſtante.

40. NOUS avons vû ci-deſſus, que dans un Fluide dont les parties ſont animées par une peſanteur de direction conſtante, tous les points d'une même tranche horizontale doivent être également preſſés, & qu'ainſi la peſanteur doit être la même dans tous les points d'une même couche, ſi la denſité eſt par-tout la même, & que la denſité doit être la même dans tous les points d'une même couche, ſi la peſanteur eſt conſtante.

Mais, en ſuppoſant dans le premier cas que la peſanteur varie d'une couche à l'autre, & dans le ſecond cas, que la denſité varie d'une couche à l'autre, ſuivant quelle Loi doivent-elles varier? Cette Loi eſt-elle abſolument indifférente, ou eſt-il néceſſaire que les parties plus peſantes ou plus denſes occupent le fond?

Il eſt évident en premier lieu, que ſi un Fluide eſt en équilibre, & qu'une partie quelconque d'une tranche horizontale vienne à augmenter en peſanteur ou en denſité, l'équilibre ſera rompu. Mais qu'on augmente tant

qu'on voudra la peſanteur ou la denſité de toutes les parties d'une tranche quelconque, il n'eſt pas moins évident que l'équilibre ne peut ceſſer, à moins qu'une partie ne céde avant les autres. Or toutes les parties tendant à deſcendre avec une égale force, quelle raiſon y a-t-il pour que l'une céde plutôt que l'autre? Il y a donc lieu de croire, au moins dans la Théorie, qu'un Fluide plus peſant ou plus denſe peut ſe ſoutenir ſur un autre moins peſant ou moins denſe, pourvû que la ſurface commune qui les ſépare, ſoit parfaitement de niveau.

Ainſi, par exemple, ſi un vaſe Cylindrique eſt rempli d'une liqueur homogene & uniformément peſante *ABCD*, (Fig. 15.) & qu'on imagine qu'une partie quelconque renfermée entre les tranches *a b*, *α ζ*, vienne à augmenter en peſanteur ou en denſité; je conçois qu'à parler en rigueur, l'équilibre ne doit point en être troublé.

Il paroît donc que la Loi de la peſanteur ou de la denſité d'une couche à l'autre, peut dans la Théorie, être ſuppoſée telle qu'on voudra.

On dira peut-être que les différentes tranches du Fluide ne pouvant pas avoir leurs ſurfaces parfaitement Mathématiques, il y aura toujours quelques parties, qui étant plus preſſées que les autres, deſcendront les premieres & rompront l'équilibre. On pourroit même ajouter, que par cette raiſon on ne doit pas regarder l'augmentation de denſité du Fluide contenu entre deux tranches, comme analogue à l'augmentation de peſanteur, parce qu'on peut ſuppoſer que la peſanteur ſoit réglée par une Loi Mathématique,

Mathématique ; & qu'ainſi toutes les particules contenues dans une même tranche Mathématique peſent également, ce qu'on ne peut pas faire pour la denſité. Mais 1°. eſt-il plus abſurde de ſuppoſer dans la Théorie, que la denſité ſoit réglée par une Loi Mathématique, que de ſuppoſer la peſanteur réglée par une telle Loi ? j'avoue que je ne vois point quelle pourroit être la raiſon de cette différence ; puiſque dans l'état naturel, l'une de ces ſuppoſitions n'eſt pas plus recevable que l'autre. 2°. Eſt-il bien certain que l'équilibre ne puiſſe ſubſiſter ſans une égalité de preſſion Mathématique & exacte en tout ſens ? Peut-on ſuppoſer avec vraiſemblance, que toutes les tranches horizontales d'un Fluide contenu dans un vaſe Cylindrique, ſoient exactement égales en denſité & en peſanteur, que le poids de toutes les colomnes verticales ſoit Mathématiquement le même ? Les parties du Fluide reſtent néanmoins en repos, parce qu'elles ont une certaine adhérence entr'elles ; & l'équilibre ſubſiſtera tant que cette adhérence ſera ſuffiſante, pour réſiſter au mouvement qui proviendroit de l'inégalité de preſſion.

Un moyen que j'avois imaginé pour faire ſoutenir, s'il étoit poſſible, une liqueur plus peſante ſur une moins peſante, comme du mercure ſur de l'eau, étoit de verſer d'abord du mercure dans un Syphon, enſorte qu'il s'y mît de niveau, puis de verſer dans l'une des branches une aſſez grande quantité d'eau, pour obliger le mercure de monter tout entier dans l'autre branche, enſorte qu'une partie de l'eau paſſât même dans l'autre branche ;

de cette maniere on auroit eû un Fluide plus peſant qui ſe ſeroit ſoutenu au-deſſus d'un autre plus léger.

Mais, en examinant la choſe de plus près, j'ai reconnu, avant d'en faire l'Expérience, qu'elle ne pourroit réuſſir comme je l'avois projetté. Soit *EFON* (Fig. 16.) le mercure, *BKON* l'eau; on conçoit aiſément qu'en verſant de l'eau peu à peu, le mercure *NO* deſcendra juſqu'en *RQ*. Mais qu'on verſe enſuite encore un peu d'eau, il eſt évident que ſi l'eau continue à pouſſer le mercure, la ſurface commune qui ſéparera ces deux liqueurs, doit ceſſer d'être de niveau, & que l'équilibre doit ſe rompre. En effet, ſi on verſe un peu d'eau lorſque le mercure eſt arrivé en *RQP*, on voit par l'Expérience que la ſurface *RQ* (Fig. 17.) du mercure s'incline peu à peu, & que l'eau ſe gliſſe dans l'eſpace *rQR*; & ſi on en verſe un peu davantage, on la voit couler le long de *QE* & venir ſe mettre au haut du mercure en *ef*, la ſurface *rQ* du mercure reſtant en repos. Le peu d'adhérence du mercure aux parois du Tuyau fait que l'eau ſe gliſſe aiſément entre le Tuyau & le mercure, & l'adhérence de l'eau aux parois du Tuyau fait que l'équilibre ſubſiſte, quoique la ſurface *rQ* ne ſoit pas de niveau.

On auroit, ce me ſemble, quelque peine à trouver le moyen de faire ſoutenir ſur l'eau une liqueur auſſi peſante que le mercure, & auſſi peu adhérente aux autres Corps. Quand bien même on ſuppoſeroit qu'une portion *ABba* de l'eau contenue dans un vaſe *ABCD* (Fig. 15.)

fût transformée en mercure tout-à-coup ; comme le mercure ſeroit peu adhérent au vaſe, les parties de l'eau moins preſſées en *a* & en *b* que par-tout ailleurs, ſe gliſſeroient ſuivant *a A* & *b B*, entre le mercure & le vaſe pour venir gagner le haut.

Au reſte, on voit très-ſouvent des liqueurs & même des Corps ſolides plus peſans que l'eau, ſe ſoutenir ſur la ſurface de l'eau ; ce qu'on ne peut attribuer qu'à la difficulté que la liqueur ſupérieure auroit à diviſer les parties de l'eau ; difficulté qui eſt plus grande que l'excès du poids de ces liqueurs ou de ces Corps ſur le poids de l'eau.

Comme la peſanteur eſt une force qu'on ſuppoſe animer également tous les Corps, & qu'elle eſt par conſéquent la même dans tous les Fluides, nous ne pouvons connoître par l'Expérience, ce qui arriveroit à des Fluides qui ſeroient différens les uns des autres par leur peſanteur, comme nous connoiſſons ce qui arrive aux Fluides qui different les uns des autres par leur denſité : nous ne pouvons ſçavoir par ce moyen, ſi de deux Fluides également denſes & inégalement peſans, le plus peſant ſeroit indifféremment au-deſſus ou au-deſſous du plus léger. Forcés de nous en tenir là-deſſus à des conjectures, nous croyons que la ſurface commune qui ſépare ces deux Fluides, ne pouvant être, à parler en rigueur, ni parfaitement Mathématique, ni également preſſée en tous ſes points, le Fluide plus peſant peut ſe ſoutenir ſur le plus léger, pourvû que les parties du plus léger ayent

entr'elles une adhérence assez forte, pour que l'équilibre puisse se conserver. Une observation assez sensible peut appuyer ce que nous venons d'avancer. En effet, si on suppose qu'il y a dans les parties des Fluides une attraction mutuelle qui agit à une très-petite distance, attraction qu'on ne peut guères se dispenser de reconnoître, il est aisé de voir que les parties qui sont à la surface, seront plus attirées que les autres, & par conséquent peseront davantage, sans qu'on puisse néanmoins supposer que la pesanteur soit exactement égale dans toutes les parties de chaque tranche.

Concluons donc, 1°. que dans la Théorie, & en parlant Mathématiquement, l'excès de pesanteur & de densité des tranches supérieures sur la pesanteur & la densité des inférieures, ne nuira point à l'équilibre.

2°. Qu'elle ne doit point même y nuire, Physiquement parlant, si la tenacité des particules est assez grande pour résister à l'effort qui proviendroit de l'inégalité de pression.

M. Clairaut, dans la *Théorie de la Figure de la Terre*, paroît croire, pag. 280, que les Loix de l'Hydrostatique exigent que les couches les plus denses soient les plus voisines du centre; cependant il n'exige point une pareille Loi pour la pesanteur particuliere de chaque couche; il paroît supposer que cette pesanteur peut aller en augmentant ou en diminuant, comme on voudra, de la surface vers le centre; il est d'ailleurs évident que dans le système de l'attraction, la force ou pesanteur de chaque par-

ticule eſt d'autant plus grande, qu'elle eſt plus éloignée du centre, puiſque cette force eſt le réſultat de l'attraction de toute la maſſe inférieure, en ſuppoſant, pour plus de ſimplicité, cette maſſe ſphérique. Or, je ne vois pas, je le répéte, pourquoi la denſité ne pourroit pas aller en diminuant de la ſurface vers le centre, dès qu'on ſuppoſe que la peſanteur peut ſuivre une telle Loi; ſuppoſition qui eſt d'ailleurs évidemment poſſible. Voyez au reſte, ce que nous dirons plus bas, chap. 5 de cette premiere Partie, ſur la *Théorie Hydroſtatique* de M. Clairaut.

§. II. *De l'équilibre d'un Fluide où les tranches varient à-la-fois en peſanteur & en denſité.*

41. Nous avons vû ci-deſſus (*art.* 27.) que ſi un Fluide eſt compoſé de tranches horizontales, dont chacune ait toutes ſes parties également denſes & également peſantes, & qu'une partie quelconque de ce Fluide vienne à ſe durcir tout-à-coup, l'équilibre n'en ſera point troublé. Nous avons prouvé même, que ſi cette maſſe ſolide étoit d'une denſité différente de celle du Fluide, l'équilibre ſubſiſteroit toujours, pourvû qu'elle eût le même poids total & le même centre de gravité que le volume de Fluide dont elle occupe la place. Qu'on imagine à préſent que cette maſſe ſolide, différente par ſa denſité du Fluide qui l'environne, devienne liquide tout-à-coup, l'équilibre ne peut ſubſiſter qu'autant que chaque tranche horizontale ſera également preſſée en tous ſes points (*art.* 36.). Or, comme toutes les parties d'une mê-

me tranche ne ſont point d'une égale denſité, puiſqu'on a ſuppoſé que la maſſe n'étoit point homogene au Fluide, la preſſion ne peut être égale, à moins que toutes les parties d'une même tranche n'ayent une peſanteur qui ſoit en raiſon inverſe de leur denſité; mais, ſi cette condition eſt obſervée, je ne vois pas ce qui pourroit empêcher que l'équilibre ne ſe conſervât.

Ainſi, je crois qu'on peut avancer cette eſpéce de Paradoxe, que deux Fluides d'inégale denſité peuvent ſe diſpoſer, l'un par rapport à l'autre, de telle maniere qu'on voudra, ſi leurs peſanteurs ſont en raiſon inverſe de leurs denſités. Au moins le peu de lumieres que nous avons ſur les propriétés des Fluides, ne nous prouve point, ce me ſemble, que cela doive être autrement. On trouvera d'ailleurs de nouvelles réflexions ſur cette queſtion, dans notre *Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides*, art. 168. Nous y renvoyons le Lecteur.

CHAPITRE IV.

De l'adhérence que les parties des Fluides ont entr'elles.

§. I.

Conjectures ſur la cauſe de cette adhérence.

42. NOUS avons fait mention ci-deſſus de l'adhérence que les particules des Fluides ont entr'elles; adhérence

qui contribue, comme nous avons vû, à y entretenir l'équilibre, malgré l'inégalité de preſſion, pourvû que cette inégalité ſoit peu conſidérable. On ne peut attribuer cette adhérence qu'à une force qui tient les particules Fluides unies entr'elles, & qui fait qu'elles ne ſe laiſſent ſéparer qu'avec difficulté. Cette force eſt-elle purement paſſive, c'eſt-à-dire, ne provient-elle que de l'aſpérité des particules fluides qui ſe touchent, ou eſt-ce une force agiſſante qui tende à unir ces particules & à les approcher les unes des autres? C'eſt ce que nous ne déciderons point ici. Il y a bien de l'apparence que les deux cauſes concourent à-la-fois. La figure ronde que les particules de l'eau affectent, & leur adhéſion aux parois des Corps, pourroient en être la preuve.

Quoiqu'il ſoit difficile de ne pas admettre une Attraction mutuelle entre les parties des Fluides, par laquelle elles agiſſent les unes ſur les autres à une très-petite diſtance; je ne ſçai ſi c'eſt avec raiſon que pluſieurs Auteurs attribuent à cette Attraction l'adhérence des particules des Fluides. Soit *C* (Fig. 18.) une des particules, *CA* la diſtance à laquelle l'Attraction peut agir. Si du rayon *CA* on décrit un Cercle, il eſt certain que la particule *C* étant attirée également de tous côtés par la matiere renfermée dans ce Cercle, ſera dans le même cas que ſi elle n'étoit point attirée du tout; & par conſéquent l'Attraction ne produira point par elle-même l'adhéſion des parties. On dira peut-être que l'Attraction ne pouvant être parfaitement la même de tous côtés, la particule *C*

ſera néceſſairement plus attirée d'un côté que de l'autre. Mais, outre qu'il réſulteroit de-là une preſſion fort petite, l'adhérence des parties ne ſeroit pas la même par-tout, quoique nous ayons lieu de juger qu'elle eſt telle. On pourroit peut-être dire encore, que les parties qui ſont à la ſurface agb, ou à une diſtance de cette ſurface, moindre que CA, n'étant point dans le cas d'être attirées également de tous côtés, compriment les parties inférieures, & que la preſſion ſe tranſmet ainſi de couche en couche. Mais ſi on ſuppoſe que le vaſe qui renferme le Fluide, ſoit de même denſité que le Fluide & d'une épaiſſeur $ac = AC$; alors les particules du Fluide ſeront par-tout également attirées en ſens contraires: cependant il n'eſt pas douteux qu'elles ne conſervent la même adhérence entr'elles.

Toutes ces raiſons réunies me font croire, que ſi l'adhérence des particules des Fluides a une cauſe active, cette cauſe eſt vraiſemblablement une force qui comprime ces parties du dehors au-dedans. Ne faiſons point de l'Attraction, ce que les Cartéſiens ont fait de leur matiere ſubtile, qui, à force d'avoir été employée à toutes ſortes d'uſages, n'eſt plus maintenant propre à aucun. Réſervons l'Attraction pour les Phenomènes où nous ne pourrons nous en paſſer. Nous n'en aurons beſoin que trop ſouvent.

§. II.

§. II.

Où l'on examine quelles doivent être les Loix de l'équilibre des Fluides, ſi on a égard à l'adhérence de leurs parties.

43. Nous examinerons principalement dans cette Section, le changement que l'adhérence des particules doit rapporter aux Loix de l'équilibre d'un Fluide *ADCZ* (Fig. 8.) ſuſpendu dans un vaſe qui n'a point de fond, ni en *AD*, ni en *ZC*. C'eſt principalement en ce cas-là, que l'effet de l'adhérence des particules eſt ſenſible: car lorſqu'un Fluide eſt renfermé dans un vaſe dont il preſſe le fond, l'adhérence des particules n'a guères d'autre effet que celui dont nous avons fait mention dans l'article 40; ſavoir, d'empêcher que l'équilibre ne ſe rompe, quoique la preſſion ne ſoit pas exactement égale de tous côtés. D'un autre côté, la Théorie que nous allons donner, nous ſera principalement utile, pour déterminer dans le ſecond Livre de cet ouvrage les Loix du mouvement d'un Fluide dont les parties ſont adhérentes entr'elles, & qui coule dans un vaſe quelconque.

44. On ne ſçauroit douter que l'adhérence des particules des Fluides n'exige une force finie pour être ſurmontée. Mais il eſt difficile de déterminer d'où provient cette adhérence. On peut faire ſur cela trois hypothèſes. 1°. En regardant les particules du Fluide comme parfaitement polies, on peut ſuppoſer que leur adhérence mutuelle provient d'une force active, appliquée à tous les points de la ſurface extérieure du Fluide, & dont la preſ-

ſion ſe diſtribue également aux autres points, ſuivant la propriété des Fluides. 2°. On peut ſuppoſer que les parties des Fluides ont leurs ſurfaces raboteuſes, & ſont accrochées, pour ainſi-dire, les unes aux autres, & regarder cette aſpérité comme la ſeule cauſe de leur adhérence. 3°. On peut enfin ſuppoſer que l'adhérence provienne de la réunion des deux cauſes précédentes. Nous allons examiner par ordre & ſucceſſivement les Loix de l'équilibre dans ces trois hypothèſes.

I.

45. Nous ſuppoſerons d'abord que l'adhérence des parties du Fluide *ADCZ* eſt cauſée par une force qui preſſe tous les points de la ſurface *AD*, ſuivant une direction perpendiculaire à cette ſurface, & qui agit de *L* vers *B*, force dont l'action eſt contrebalancée par celle d'une autre force égale appliquée à tous les points de la ſurface *ZC*, & qui agit en ſens contraire de *B* vers *L*. Nous nommerons chacune de ces deux forces, *force d'adhérence*; & comme ce ſont des forces finies, nous les ſuppoſerons repréſentées par une Aire ou ſurface conſtante, que nous appellerons *A*, pour l'exprimer d'une maniere analogue à celle dont nous avons repréſenté juſqu'ici la preſſion des tranches *ab* d'un Fluide peſant *ABED*, (Fig. 5.), preſſion que nous avons déſignée par des Aires de Courbes correſpondantes *GgfF*.

46. PROPOS. I. *Si un Fluide* ADCZ (Fig. 8.) *eſt renfermé dans un vaſe* POTQ *qui n'ait aucun fond en AD,*

ni en ZC, *& que les différentes tranches* FG *de ce Fluide ſoient preſſées par des forces accélératrices* kf, *telles, qu'abſtraction faite de l'adhérence des parties, le Fluide ſoit en équilibre; je dis qu'il ſera encore en équilibre, ſi on a égard à cette adhérence.*

Car il eſt évident qu'une tranche quelconque *FG* eſt preſſée également ſuivant *KB* & ſuivant *KL*, par l'action des deux forces d'adhérence appliquées en *AD* & en *ZC*. Mais (*hyp.*) la ſurface *FG* étoit déja preſſée également en ſens contraire, avant qu'on eut égard à l'adhérence des parties. Donc &c.

47. PROPOS. II. *Suppoſons préſentement, qu'abſtraction faite de l'adhérence des parties, le Fluide* ADZC (Fig. 10.) *ne fût pas reſté en équilibre, c'eſt-à-dire,* (art. 22.) *que l'Aire* adnmobc *ne ſoit pas* $= o$, *ou* (art. 26.) *que la Courbe* euhs *ait des Ordonnées négatives; on demande de ce qui doit arriver, ſi on a égard à l'adhérence des parties.*

Comme nous exprimons ici les différentes parties de l'Aire *adnmobc* par les Ordonnées de la Courbe *euhs*, nous exprimerons l'Aire *A* qui repréſente la force d'adhérence par une ligne finie *eR*. Cela poſé, il peut arriver deux cas:

Premier cas. Si *eR* eſt $=$ ou $>$ que la plus grande des Ordonnées négatives *lh*, il eſt évident que la tranche diſtante de *AD*, d'une quantité égale à *RX*, ſera preſſée ſuivant *BL* avec une force égale à *hX*. Il faut donc ajouter cette force avec celles qui preſſent les tranches compriſes depuis *X* juſqu'en *S*, & qui, abſtraction faite

de l'adhérence des parties, ſont repréſentées (*art.* 26.) par les Ordonnées πr. Donc ſi la ſurface inférieure du Fluide eſt, par exemple, VN au lieu de ZC, la preſſion que ſouffriroit cette ſurface, en n'ayant égard qu'à la force d'adhérence appliqué en AB, ſeroit Oy. Mais, comme la ſurface VN eſt preſſée en ſens contraire par une force d'adhérence égale à celle de AB, c'eſt-à-dire, = à eR, il s'enſuit que la preſſion ſe réduira à ϖy. D'où l'on voit que ſi ϖy n'eſt pas $= o$, il n'y aura point équilibre, puiſqu'il n'y a rien qui ſoutienne cette preſſion. Elle ſera de g vers L ou de g vers B, ſelon que ϖy ſera poſitive ou négative.

Second cas. Si eR eſt moindre que lh, alors il ne peut plus y avoir d'équilibre. Car s'il y avoit un fond en AD, ce fond ſeroit preſſé avec une force égale à Xh*, c'eſt-à-dire, en général, par une force proportionnelle à la diſtance de la ligne Ry au point h, par où paſſe la plus grande des Ordonnées négatives de la Courbe $euhs$.

Comme dans ce cas la force d'adhérence appliquée en AB eſt détruite, on voit aiſément que la ſurface inférieure du Fluide, que je ſuppoſe être VN, ſeroit comprimée par une force $= \varphi y$, s'il n'y avoit point d'autre force d'adhérence que celle qui eſt appliquée en AD. Mais comme la ſurface VN eſt preſſée par une force égale & contraire, la preſſion exercée ſur cette ſurface ſera $\varphi y - eR$, & ſera poſitive, ou nulle, ou néga-

* Dans le cas dont il s'agit ici, la ligne RY doit couper lh en quelque point : ce qui eſt aiſé à imaginer, ſans avoir beſoin d'une nouvelle figure.

tive, ſelon que φy ſera $>$ ou $=$ ou $<$ eR.

48. *Coroll.* Donc ſi un Fluide *ADCZ*, renfermé dans un vaſe qui n'a point de fond, n'eſt pas en équilibre, abſtraction faite de l'adhérence de ſes parties, il faut diſtinguer ſi le défaut d'équilibre vient de ce que l'Aire *adnmobc* n'eſt pas $= 0$, ou s'il vient ſeulement de ce que la Courbe *euhs* a des Ordonnées négatives. Dans le premier cas, l'adhérence des parties ne peut rétablir l'équilibre. Dans le ſecond cas, elle le rétablira, pourvû que eR ſoit $=$ ou $>$ que la plus grande lh des Ordonnées négatives de la Courbe *euhs*.

II.

49. PROPOS. I. *Si l'adhérence des particules du Fluide* ADCZ *eſt ſuppoſé venir de la ſeule aſpérité de ces particules, & que les différentes tranches* FG *de ce Fluide ſoient animées par des forces accélératrices* kf, *telles, que le Fluide fût reſté en équilibre, abſtraction faite de l'adhérence de ſes parties; je dis qu'il demeurera encore en équilibre, ſi on a égard à cette adhérence.*

Cette vérité eſt ſi claire, ce me ſemble, qu'elle n'a pas beſoin de démonſtration; l'adhérence des parties eſt ici une force ſimplement paſſive, qui ne ſçauroit rompre un équilibre déja ſubſiſtant.

50. PROPOS. II. *Si l'adhérence des particules du Fluide provient de la ſeule aſpérité de ſes parties, & que chaque tranche* FG *ſoit animée par une force accélératrice, repréſentée par l'Ordonnée* kf *de la Courbe* dinfmob; *je dis*

que tous les points d'une tranche quelconque FG, *ſont preſſés ſuivant* KL *par une force proportionnelle à l'Aire* kfmocb.

En effet, imaginons pour un moment que la partie *ADGF* du Fluide eſt anéantie, & que *FG* eſt un plan immobile auquel la ſurface *FG* du Fluide ſoit adhérente, comme elle l'étoit au Fluide *ADGF* : il eſt évident qu'on pourra ſubſtituer à la force d'adhérence paſſive qui provient de l'inégalité des parties, une force active appliquée en *ZC*, & dont la preſſion ſur *FG* & ſur toutes les autres tranches, ſoit égale à la force qui eſt néceſſaire pour ſéparer les particules; force qui doit être donnée, & qu'on peut repréſenter par une Aire ou ſurface conſtante *B*. Cela poſé, il eſt certain que $FG(B - kfmocb)$ ſeroit la preſſion que ſouffriroit *FG*. Mais *FG*. *B* eſt la force qui retient la ſurface *FG*. Donc $FG \times (kfmocb)$ eſt la force qui tend à faire deſcendre cette ſurface.

51. *Coroll.* On voit par-là que le Théorême démontré dans l'article 14, pour le cas où le vaſe qui renferme le Fluide a un fond, & où une tranche quelconque eſt preſſée de haut en bas par l'action du Fluide ſupérieur; on voit, dis-je, que ce Théorême eſt vrai auſſi pour le cas où le vaſe n'a point de fond, & où une tranche eſt tirée de haut en bas par l'action du Fluide inférieur.

52. PROPOS. III. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'art.* 50, *je dis qu'il eſt néceſſaire pour l'équilibre, que l'Aire* adnmobc *ſoit zero, & que la Courbe* euhs *n'ait aucune Ordonnée négative plus grande que la li-*

gne eR *qu'on ſuppoſe ici repréſenter la ſurface* B, *qui exprime la force d'adhérence des parties.*

Car ſoit *m* le point où l'Aire *adinfm* a la plus grande valeur négative poſſible ; tous les points de la tranche du Fluide qui répond au point *m*, ſeront tirés ſuivant *ma* avec une force proportionnelle à l'Aire *mfnida*. Ces mêmes points ſeront de plus tirés ſuivant *mc* avec une force égale à *mzobc*. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut 1°. que ces deux forces ſoient égales : donc *mzobc* = *mfnida* & *adinmobc* = 0. 2°. Il faut que chacune de ces forces ne ſoit pas plus grande que la force d'adhérence *B*. Donc &c.

53. *Remarque.* Quelques Lecteurs croiront peut-être qu'il ſuffit que l'Aire *mzobc*, où ſon égale *mfnida* ne ſoit pas $> \frac{B}{2}$; parce qu'ils pourront imaginer qu'il ſuffit que la tranche qui répond à *m*, ſoit tirée à-la-fois en haut & en bas avec une force un peu plus grande que $\frac{B}{2}$ pour pouvoir être diviſée. Mais on ſeroit dans l'erreur de penſer ainſi : car, quand deux puiſſances égales & contraires tendent à ſéparer deux corps l'un de l'autre, il faut préciſément la même force à chacune de ces puiſſances, que ſi l'autre étoit anéantie, & qu'on y ſubſtituât un obſtacle immobile ; parce que chacune des puiſſances fait, par rapport à l'autre, l'effet d'un pareil obſtacle.

54. *Coroll.* Il eſt évident que les propoſitions démontrées *art.* 47 & 48 pour la premiere hypothèſe ſur la

cauſe de l'adhérence, ſont encore vraies dans la ſeconde hypothèſe.

III.

55. Si l'adhérence des particules eſt cauſée à-la-fois par l'aſpérité des parties & par une force active appliquée aux deux ſurfaces, en ce cas on prouveroit, en combinant les Principes que nous venons d'établir, que ſi on nommoit A la force appliquée aux deux ſurfaces, & B la force néceſſaire pour déſunir les parties indépendamment de la force A, il faudroit pour l'équilibre, que l'Aire $adnmobc$ fut $= o$, & que $mzobc$ ou ſon égale $mfnida$ ne fût pas $> B + A$.

CHAPITRE V.

De l'équilibre des Fluides, dont la ſurface ſupérieure eſt Courbe.

56. LA Théorie de l'équilibre des Fluides dont la ſurface ſupérieure eſt Courbe, eſt d'une toute autre difficulté que celle de l'équilibre des Fluides dont la ſurface eſt plane, & dont les parties ſont animées par une peſanteur dont la direction eſt conſtante. Elle eſt d'ailleurs fort importante par le rapport qu'elle a avec la queſtion de la Figure de la Terre. M. *Huyghens*, en traitant cette matiere, a pris pour principe d'équilibre la perpendicularité de la peſanteur à la ſurface. M. *Newton* s'eſt ſervi du Principe de

de l'équilibre des colomnes centrales : Mrs *Bouguer* & *de Maupertuis* ont fait voir de plus, qu'il étoit néceſſaire, pour qu'il y eût équilibre, que les Principes de Mrs *Huyghens* & *Newton* euſſent lieu à-la-fois. M. *Maclaurin* y a ajouté une nouvelle condition; c'eſt qu'un canal quelconque, formé de deux branches rectilignes AC, BC (Fig. 19.) qui partent de la ſurface, & qui aboutiſſent à un point quelconque C au-dedans du Fluide, ſoit en équilibre. Enfin, ſelon M. *Clairaut*, il faut qu'en général une partie quelconque de Fluide qu'on imagineroit renfermée dans un Tuyau PQE, aboutiſſant à la ſurface, ſoit en équilibre. Ce Principe, comme je l'ai fait voir ailleurs (*a*), n'eſt qu'une conſéquence néceſſaire du Principe de M. *Maclaurin*. Je dois obſerver de plus, que M. *Daniel Bernoulli* avoit déja donné le même Principe d'équilibre dans ſon Hydrodynamique, ſection ſeconde, §. 3, page 18. *In aquâ ſtagnante*, dit-il, *tubus utcumque formatus fingi poteſt, in quo utique aquâ ſitum ſervabit quem anteà habuit, cum perinde ſit, ſive aquâ tubo incluſa coerceatur lateribus tubi, ſive circumſtagnante aquâ.* Mais il faut avouer en même-temps que M. *Clairaut* eſt le premier qui ait développé l'uſage de ce Principe des canaux curvilignes, & qui en ait montré l'application à la Théorie de la figure de la Terre. M. *Clairaut* fait voir de plus & démontre, comme une ſuite du Principe dont il s'agit, que ſi πeq, Nns (Fig. 20.) ſont les tranches ou couches auxquelles la peſanteur eſt perpendiculaire,

(a) *Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides*, Paris 1752, art. 18.

il faut, en imaginant ces couches infiniment proches, que l'épaiſſeur de chaque couche en un point quelconque, ſoit en raiſon inverſe de la peſanteur qui agit en ce point. M. *Clairaut* appelle *Couches de niveau*, les Couches auxquelles la peſanteur eſt perpendiculaire.

Je crois au reſte, que ce Savant s'eſt trompé, quand il a avancé que dans un Fluide hétérogène, les couches de différente denſité devoient toutes être de niveau. Voyez à ce ſujet l'art. 86 de mes *Recherches ſur la cauſe des vents, & mon Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides*, art. 165, 166 & 167. Il eſt vrai que je me ſuis auſſi trompé moi-même, en croyant que dans le ſyſtême de l'Attraction, les couches de la Terre pourroient n'être pas de niveau. C'eſt ce que le célèbre M. *de la Grange* a remarqué dans le ſecond volume des Mémoires de la Société Royale des Sciences de Turin, & ce que je prouverai moi-même ailleurs plus en détail. Mais il n'en eſt pas moins vrai, que dans un grand nombre d'hypothèſes, un Fluide peut être en équilibre, ſans que les particules d'une même denſité ſe trouvent néceſſairement placées dans une couche de niveau. Quoi qu'il en ſoit, il eſt conſtant, ſuivant le Principe général dont on vient de parler, que chaque couche de niveau doit être également preſſée en tous ſes points; & qu'ainſi l'épaiſſeur en chaque point doit être en raiſon inverſe du produit de la denſité par la peſanteur.

Les différentes Loix d'équilibre, découvertes par les Savans Géometres que nous venons de citer, paroiſſent

être les ſeules auxquelles nous devions nous arrêter pour le préſent, juſqu'à ce que l'Expérience ou une connoiſſance plus parfaite de la nature des Fluides nous ait perſuadé qu'il n'y en a point d'autres, ou peut-être nous en faſſe découvrir de nouvelles.

57. Me ſeroit-il permis de propoſer là-deſſus quelques conjectures ? on ſçait, & nous l'avons prouvé, que la direction de la peſanteur doit être perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Mais ne pourroit-il pas être néceſſaire que la peſanteur à la ſurface obſervât une certaine Loi, ou toutes ſortes de Loix lui ſeroient-elles indifférentes ? Quand les particules d'un Fluide dont la ſurface eſt convexe, ſont preſſées perpendiculairement à cette ſurface, on ne peut nier, ce me ſemble, qu'elles n'ayent une certaine action pour ſe ſoulever les unes les autres, & il eſt néceſſaire que chacune des particules réſiſte également à cette action. Auſſi nous avons vû ci-deſſus (*art.* 5.), que ſi un Fluide eſt renfermé dans un vaſe percé de pluſieurs ouvertures, toutes les parties du Fluide contigues à ces ouvertures, doivent être également preſſées pour qu'il y ait équilibre. Lorſque la peſanteur agit, non-ſeulement à la ſurface, mais au-dedans de la maſſe fluide, la couche infiniment proche de la ſurface doit être également preſſée en tous ſes points, comme M. *Clairaut* le démontre. C'eſt pour cela que la diſtance d'un point de la ſurface au point correſpondant de la couche infiniment proche, doit être en raiſon inverſe de la peſanteur à la ſurface. Mais ſi tous les points de la ſeconde couche doi-

vent être également preſſés par l'action extérieure des parties qui ſont au-deſſus d'elle, ne pourroit-on pas inférer de-là, que tous les points de la ſurface doivent auſſi être également preſſés par la peſanteur qui eſt inhérente à ſes parties, c'eſt-à-dire, que la peſanteur de toutes ces particules doit être égale? En effet, ſi toutes les parties d'une couche à laquelle la peſanteur eſt perpendiculaire, doivent être également preſſées par le poids du Fluide ſupérieur; ce ne peut être, ce me ſemble, qu'afin qu'une des particules ne tende pas à ſe mouvoir avec plus de force que l'autre. Or, s'il étoit néceſſaire pour l'équilibre, que toutes les parties d'une couche de niveau tendiſſent à ſe mouvoir avec une égale force, la peſanteur devroit être égale à tous les points de la ſurface.

58. Quand il ſeroit prouvé que la peſanteur dût être la même à tous les points de la ſurface, cette condition ne ſuffiroit peut-être pas encore, pour que la ſurface fût en équilibre. Voici la raiſon qui m'oblige à penſer ainſi. Soient pluſieurs Globules égaux *A*, *B*, *C*, &c. (Fig. 21.) diſpoſés les uns auprès des autres de telle maniere, que leurs centres *A*, *B* &c. ſoient dans le contour d'un Polygone à angles très-obtus, & ſuppoſons que chacun de ces Globules, comme *B*, ſoit pouſſé par une force dont la direction *BN* diviſe l'angle *ABC* en deux également; je dis qu'il ne peut y avoir d'équilibre entre tous ces Globules, à moins que la force de chacun ne ſoit en raiſon du Sinus de l'angle *KBC*. (On peut démontrer aiſément cette propoſition, en remarquant que

la force du Corps *B* ſuivant *BN* doit ſe décompoſer en deux autres forces ſuivant *BA* & *BC*, qui ſoient l'une & l'autre égales aux forces contraires des Corps *A* & *C* ſuivant *AB* & *CB*.) Or de-là il s'enſuit, que ſi ces Globules ſont infiniment petits, il faut que la peſanteur de chacun ſoit en raiſon inverſe du rayon de la développée de la Courbe *ABCD*, ſur laquelle ſont placés leurs centres.

Si cette derniere Loi avoit lieu dans les Fluides, c'eſt-à-dire, ſi les particules des Fluides devoient être conſidérées comme de petites boules, & ſi en même temps la peſanteur devoit être égale à tous les points de la ſurface, il en réſulteroit cette propoſition aſſez ſinguliere, qu'il n'y auroit que les Fluides à ſurface plane ou ſphérique, qui puſſent être en équilibre. Mais ſans examiner quelles pourroient être les conſéquences de ce Principe, je crois devoir terminer des Réflexions que je n'ai fait, pour ainſi dire, que haſarder ici, & qui ſeront toujours aſſez utiles, ſi elles peuvent nous procurer ſur cette matiere, des éclairciſſemens de la part des Savans qui l'ont le plus approfondie.

J'ajouterai ſeulement, qu'un des meilleurs moyens qu'on pût employer, ce me ſemble, pour décider cette queſtion, au moins en partie, ſeroit de bien démontrer que la Figure de la Terre, trouvée par la Théorie, doit s'accorder avec celle qu'on lui trouve par les meſures actuelles. Car on ne ſçauroit douter que la Terre ne ſoit applatie vers les Pôles, après les opérations ſi exactes qui

ont été faites au Nord & ſous l'Equateur; opérations confirmées par celle qu'a faite M. *Caſſini* en 1740, & de laquelle il a conclu l'applatiſſement de la Terre, ſans égard pour pluſieurs meſures précédentes, d'où réſultoit le contraire, & qu'il n'a pas crues aſſez exactes. Or, ſi la Terre eſt applatie, & ſi la peſanteur, comme on l'a prouvé par d'autres Expériences, va en augmentant de l'Equateur au Pôle; ſi de plus, cette peſanteur eſt celle qu'auroient eue les particules de la Terre, ſuppoſées Fluides, & en équilibre entr'elles; on doit en conclure, que pour qu'un Fluide ſoit en équilibre, il n'eſt pas néceſſaire que la peſanteur à la ſurface ſoit en raiſon inverſe du rayon oſculateur en chaque point, ni qu'elle ſoit égale à tous ces points, ni enfin que la ſurface ſoit ſphérique.

De l'équilibre d'un Corps ſolide quelconque dans un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur quelconque.

THÉORÊME VIII.

59. *Si une maſſe de Fluide* P p E (Fig. 22.) *eſt en équilibre, & qu'on imagine que le Fluide renfermé entre deux Couches de niveau infiniment proches* G F K, g f q, *vienne à ſe durcir tout-à-coup, ſes parties conſervant la même peſanteur & la même denſité, je dis que l'équilibre ſubſiſtera.*

Car, ayant tiré à volonté deux parallèles infiniment proches *gf*, *hq* & mené les lignes *Ff*, *qφ* perpendiculaires à *fq*, & *Gg*, *hH* perpendiculaires à *gh*, il eſt clair (ſoit que les remarques faites *art.* 57 & 58, ayent lieu

ou non) que la pesanteur en F suivant Ff, sera à la pesanteur en G suivant Gg, (*art.* 56.) comme Gg à Ff. D'où il s'ensuit, que les pesanteurs des masses $Ffq\varphi$, $Ggh H$, suivant Ff, Gg, sont entr'elles comme fq à gh; donc les efforts suivant fg, gf, résultans de ces pesanteurs, seront entr'eux comme $fq \times \frac{fl}{fq}$ à $\frac{gh \times gu}{gh}$, c'est-à-dire, qu'ils seront égaux. On prouvera de même que les efforts suivant fZ, gV, sont détruits par des efforts contraires en Z & en V. D'où l'on voit que la masse proposée sera en équilibre.

Si les parties fq, gh étoient de densité différente, les forces accélératrices avec lesquelles elles tendroient à se mouvoir en vertu des pressions égales suivant Ff, Gg, seroient en raison inverse de leurs densités; d'où il suit qu'en nommant Δ la densité d'une de ces particules, par exemple, fq, (ce qui donne la masse $fq = \Delta \times fq$) & φ la pression en f, la force suivant fq seroit, comme dans le cas précédent, $\frac{\varphi}{\Delta} \times \Delta \times fq \left(\frac{fl}{fq}\right) = \varphi \times fl$, c'est-à-dire, égale à celle de la particule gh suivant gf.

Corollaire.

60. Donc si on imagine que toute la masse de Fluide renfermé par la couche ABK vienne à se durcir, ses parties conservant la même densité & la même pesanteur qu'auparavant, cette masse sera en équilibre, puisqu'on peut la regarder comme composée d'une infinité de cou-

ches de niveau, dont chacune en particulier ſera en équilibre.

THÉORÊME IX.

61. *Si une maſſe de Fluide* PpE *eſt en équilibre, & qu'il s'en durciſſe une partie quelconque, les particules durcies conſervant la même peſanteur & la même denſité, je dis que l'équilibre ſubſiſtera.*

Car 1°. puiſque la maſſe ſolide renfermée par la couche de niveau *ABK* ſeroit en équilibre, (*art.* 60.) elle ſeroit encore en équilibre, étant augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite *ACBD;* en effet, ſi la maſſe *ADK* eſt augmentée de la portion *ACDB,* il eſt évident qu'une force égale au poids de *ACDB* tend à pouſſer cette maſſe en embas. Mais comme la preſſion de la ſurface *ACB* eſt diminuée dans ce même cas du poids de *ACDB,* & qu'auparavant cette ſurface étoit preſſée également par-tout, il s'enſuit qu'une force égale au poids de *ACDB* tend à mouvoir en enhaut la maſſe *ADK;* donc cette maſſe tend à ſe mouvoir également en deux ſens contraires : donc elle doit reſter en repos. On prouvera de même, que ſi la maſſe *ADK* étoit diminuée de la portion *ACDB,* elle tendroit à ſe mouvoir en enhaut avec une force égale à celle avec laquelle le Fluide la pouſſeroit en embas. Donc &c.

2°. En augmentant ou diminuant ainſi, toujours infiniment peu, la maſſe *ADK;* on peut la changer en une maſſe de telle figure qu'on voudra, & on prouvera toujours

toujours que les changemens infiniment petits qu'on fera à chaque inſtant, ne troubleront point l'équilibre. Donc &c.

On trouvera plus bas, *art.* 407, une démonſtration plus étendue & plus rigoureuſe de ce Théorême & du précédent, pour ceux qui ne ſeroient pas pleinement ſatisfaits des démonſtrations qu'on vient d'en donner, quoique ſuffiſantes pour le commun des Lecteurs.

CHAPITRE VI.

De l'équilibre des Fluides élaſtiques.

62. On appelle *Fluide élaſtique*, celui qui a la propriété de ſe comprimer & de ſe dilater, c'eſt-à-dire, de contenir un même nombre de parties ſous un volume, tantôt moindre, tantôt plus grand.

L'air eſt de tous les Fluides que nous connoiſſons, celui dont la vertu élaſtique eſt le plus ſenſible. Nous ignorons au reſte quelle en eſt la cauſe : auſſi ne la regardons-nous ici que comme un fait.

C'eſt une vérité reconnue de tout le monde, qu'un Corps élaſtique fait en tout ſens un effort égal pour ſe dilater, que la vertu élaſtique de ce Corps agit également en tout ſens. Cette propriété générale, combinée avec les propriétés particulieres des Fluides, nous conduit à trouver les Loix de l'équilibre & de la preſſion des Fluides élaſtiques, comme on le verra dans les articles ſuivans.

Loix générales de l'équilibre & de la preſſion des Fluides élaſtiques.

63. Imaginons d'abord un reſſort AB, (Fig. 23.) appuyé d'un côté contre un plan inébranlable DN, & comprimé de l'autre par une puiſſance ou poids A, de maniere qu'il ſoit réduit à aB; il eſt clair que les points B, a, feront un effort égal, l'un contre le plan ſuivant BC, l'autre en ſens contraire ſuivant aA. Or ce dernier effort eſt préciſément égal à la preſſion du poids A. Donc la preſſion en B ſuivant BC eſt égale à la preſſion de ce même poids: c'eſt-à-dire, que le point B du plan eſt comprimé, comme il le ſeroit immédiatement par le poids A.

64. Qu'on ôte enſuite le plan ou l'appui DN, & qu'on imagine un nouveau reſſort BC égal & ſemblable au reſſort AB, & appuyé contre un plan fixe dh; je dis que le point C ſera preſſé avec une force égale à celle du poids A, & que chacun des reſſorts AB, BC, ſera comprimé d'une quantité égale à aB, enſorte que le point B deſcendra au point $\mathfrak{C}$, tel que $C\mathfrak{C} = aB$, & le point A au point α, tel que $\mathfrak{C}\alpha = aB$. Car il eſt évident que l'effort du point C contre le plan, doit être égal à l'effort du point $\mathfrak{C}$ ſuivant $\mathfrak{C}\alpha$, ou, ce qui eſt la même choſe, à l'effort du point $\mathfrak{C}$ ſuivant $\mathfrak{C}C$, lequel eſt égal à l'effort du point α ſuivant αA, puiſque le reſſort $\alpha\mathfrak{C}$ fait des efforts égaux en ſens contraires: or ce dernier effort eſt égal à l'effort du poids A, qui dans le premier cas étoit égal à l'effort du point a ſuivant aA, lorſqu'il n'y avoit qu'un ſeul reſſort. De tou-

tes ces égalités combinées, il s'enſuit que le point C eſt preſſé par une force égale à celle du poids A, & que l'on a $C\mathfrak{G} = \mathfrak{G}a = Ba$.

65. Donc en général, quel que ſoit le nombre des reſſorts comprimés par une ſeule & même puiſſance, la preſſion qu'ils exerceront contre un obſtacle immobile, ſera égale à la preſſion qu'exceroit immédiatement contre cet obſtacle, la puiſſance par laquelle ils ſont comprimés; & l'eſpace dans lequel ces reſſorts comprimés ſeront réduits, ſera à l'eſpace auquel un ſeul de ces reſſorts ſeroit réduit par la même puiſſance, comme le nombre des reſſorts eſt à l'unité.

66. Préſentement, ſi on imagine deux reſſorts AB, BC, (Fig. 24) appuyés contre un plan DN, dont le premier ſoit comprimé par une puiſſance ou un poids A, comme ci-deſſus, & le ſecond ſoit comprimé en B par une nouvelle puiſſance ou un nouveau poids, égal ou non, au poids A; je dis que le point C ſera preſſé avec un effort égal à celui des deux poids A, B, pris enſemble; que le reſſort AB ſera comprimé d'une quantité a b préciſément égale à aB, & que le reſſort BC ſera réduit en un eſpace b C moindre que a b. Car l'effort du point C contre le plan, ou, ce qui eſt la même choſe, l'effort du point b ſuivant b a, eſt égal à l'effort de la puiſſance B appliquée en b, plus à l'effort du point a ſuivant a A, lequel eſt égal à l'effort de la puiſſance A. Donc le point b ou C eſt comprimé par une force égale à $A + B$, & le point a par une force égale à A. Donc &c.

Il n'eſt pas aiſé de déterminer le rapport de a b à b C.

Il faudroit ſçavoir, pour cela, de combien un reſſort ſe comprime par un poids donné. Nous entrerons ci-après dans un plus grand détail là-deſſus.

67. Donc en général, *s'il y a tant de reſſorts qu'on voudra, chargés par un nombre quelconque de puiſſances ou de poids, la preſſion de ces reſſorts contre un obſtacle immobile, ſera toujours égale à la ſomme de ces puiſſances ou de ces poids réunis.*

68. Qu'on détruiſe maintenant une partie des poids & des reſſorts ſupérieurs, & qu'on ſubſtitue un obſtacle fixe & inſurmontable à la place du premier des poids reſtans; il eſt évident que la compreſſion du point C reſtera toujours la même, puiſque l'état & la compreſſion de tous les reſſorts ſupérieurs n'a point changé.

69. Ceci bien entendu, imaginons dans un vaſe Cylindrique $CDFE$, (Figure 25.) un Fluide homogène $ABFE$, lequel devenant tout-à-coup élaſtique, ſoit comprimé en $abFE$ par une cauſe quelconque. Soit GKH la Courbe des denſités Gh, KZ, Hm &c. de ſes différentes tranches, MLN la Courbe des forces accélératrices eM, fL &c. qu'on peut ſuppoſer produire la compreſſion de chaque tranche; il eſt évident qu'en nommant $ef, x, fL, \varphi, KZ, \delta$, on aura la preſſion de $EF = \int \varphi \delta dx$.

70. En général, de quelque figure que ſoit le vaſe $CDFE$ (Fig. 26.) il ſuit des *art.* 67 & 14, que le Fluide réduit en $abFE$, preſſera le fond EF avec une force égale à $\int \varphi \delta dx$, c'eſt-à-dire, avec une force préciſément égale

à celle dont ce fond ſeroit preſſé, ſi le Fluide *abFE* n'avoit aucun reſſort, & que ſes différentes tranches euſſent la denſité δ, & fuſſent animées par les forces φ.

71. Donc en général, *ſi un vaſe quelconque* CDFE *contient un Fluide élaſtique* abFE, *dont les parties ſoient animées par des forces accélératrices qui en cauſent la compreſſion, le fond de ce vaſe eſt preſſé de la même maniere, toutes choſes d'ailleurs égales, que ſi le Fluide reſtant dans le même état, étoit ſuppoſé tout-à-coup privé de reſſort; & il faudra, pour ſoutenir le vaſe, la même puiſſance qu'il faudroit, ſi le Fluide étoit ſans reſſort, c'eſt-à-dire,* (art. 14.) *une puiſſance égale au poids du Fluide.*

72. Il y a cependant cette différence entre le Fluide ſuppoſé élaſtique & le Fluide ſuppoſé ſans reſſort, que ſi une partie quelconque $ab\mathfrak{C}\alpha$ (Fig. 25.) vient à ſe geler, ou à être ſéparée de l'autre par quelqu'obſtacle inſurmontable $\alpha\mathfrak{C}$, ou même à être abſolument anéantie, l'obſtacle $\alpha\mathfrak{C}$ ſubſiſtant, la preſſion du fond *EF* diminue quand le Fluide eſt ſans reſſort, au lieu qu'elle demeure toujours la même (*art.* 68.) ſi le Fluide eſt élaſtique.

Du reſte, il faut dans l'un & l'autre cas, la même puiſſance pour ſoutenir le vaſe rempli du Fluide $\alpha\beta EF$; car 1°. quand le Fluide eſt ſans reſſort, il ne faut, pour ſoutenir le vaſe $EF\mathfrak{C}\alpha$ chargé du Fluide $EF\mathfrak{C}\alpha$, qu'une puiſſance égale au poids de ce même Fluide $EF\alpha\mathfrak{C}$. 2°. Quand le Fluide eſt élaſtique, la portion du vaſe *rt* (Fig. 27.) eſt preſſée ſuivant *Tt* avec une force proportionnelle au poids qu'auroit le Fluide *TRrt*; mais le point *V*

eſt en même-temps preſſé ſuivant VT, avec une force égale au poids qu'auroit le Fluide $TRuV$. Donc &c.

De la preſſion d'un Fluide élaſtique, dont les parties ſont comprimées par leur ſeul poids.

73. Soit un vaſe de figure quelconque $CDFE$ (Fig. 26.) rempli d'un Fluide peſant & homogène $ABFE$, lequel vienne tout-à-coup à ſe comprimer par la ſeule gravitation des parties ſupérieures ſur les inférieures, & ſoit réduit à l'eſpace $abFE$: il eſt évident,

1°. Que les particules du Fluide ſeront d'autant plus comprimées & d'autant plus denſes, qu'elles ſeront plus proches du fond EF.

2°. Que la denſité à la ſurface ab ſera la même que celle du Fluide avant la compreſſion, puiſque les parties de cette ſurface ab ne ſont comprimées que par un poids infiniment petit.

3°. Si on nomme comme dans l'*art.* 69. hZ, x, δ la denſité variable KZ de chaque tranche OP, & p la peſanteur conſtante qui anime toutes les tranches, on aura la preſſion du fond $EF = \int \delta p dx$, ou $p \times EF \times$ l'Aire $hGHm$.

COROLLAIRE I.

74. De-là il s'enſuit que la preſſion du fond EF dans le cas où le Fluide eſt ſans reſſort & dans ſon état naturel $ABFE$, eſt à la preſſion de ce fond, lorſque le Fluide eſt élaſtique & comprimé en $abFE$, comme le rectangle $QRVm$ à l'Aire $hGHm$.

COROLLAIRE II.

75. Donc 1°. *Si le vaſe eſt un rectangle comme dans la* Fig. 25, *le fond* EF *ſera comprimé par le Fluide ſuppoſé élaſtique, comme il l'étoit par le Fluide ſuppoſé ſans reſſort.* Car la quantité de Fluide contenue en $abFE$, eſt égale à celle qui eſt contenue en $ABFE$. Or la premiere eſt $= EF \times \int \delta\, dx = EF \times$ l'Aire $hGHm$. La ſeconde eſt $EF \times QRVm$: donc $QRVm = hGHm$. Donc &c.

2°. *Si le vaſe va en augmentant de largeur de haut en bas* (Fig. 26.) *le fond* EF *ſera moins preſſé par le Fluide élaſtique, qu'il ne l'étoit par le Fluide ſans reſſort.* Car ſoient priſes dans les Fluides $ABFE$, $abFE$ deux portions $EFTS$, $EFPO$, qui contiennent une égale quantité de matiere, & deux portions infiniment petites $OPpo$, $STts$, qui en contiennent auſſi une égale quantité; on aura $Xx \times ST \times YX = OP \times ZK \times Z\zeta$. Donc puiſque (*hyp.*) $ST < OP$, on aura $Xx \times YX > ZK \times Z\zeta$. Donc la ſomme de tous les rectangles $Xx \times YX$ ſera plus grande que la ſomme de tous les rectangles $ZK \times Z\zeta$, c'eſt-à-dire, le rectangle $QRVm > hGHm$. Donc &c.

3°. *Si le vaſe alloit en diminuant de largeur de haut en bas, le fond ſeroit plus preſſé par le Fluide élaſtique, qu'il ne le ſeroit par le Fluide ſans reſſort.* Cela ſe démontre d'une maniere ſemblable; car pour lors $ST > OP$, rend $QRVm < hGHm$.

COROLLAIRE III.

76. La puiſſance néceſſaire pour ſoutenir le vaſe, eſt la même dans le cas du Fluide élaſtique & dans celui du Fluide ſans reſſort, puiſque dans l'un & l'autre cas elle eſt égale au poids du Fluide, comme il eſt aiſé de le faire voir.

REMARQUE.

77. Si la compreſſion du Fluide dans l'eſpace *abFE* étoit cauſée non-ſeulement par le poids de ce Fluide, mais encore par quelqu'autre force ; alors il faudroit avoir égard à cette force particuliere dans la détermination de la preſſion du fond *EF*. Par exemple, ſi le vaſe étoit Cylindrique, la preſſion du fond *EF* ſeroit égale au poids du Fluide augmenté de cette même force : auſſi il ſeroit néceſſaire d'employer dans ce dernier cas, une puiſſance plus grande que le poids du Fluide, pour ſoutenir le vaſe.

De-là il s'enſuit que la *cauſe immédiate* de la preſſion qu'exercent les Fluides élaſtiques, eſt la vertu élaſtique de ces Fluides, & non leur poids ; on ne doit donc attribuer la ſuſpenſion du mercure dans le Barométre au poids de l'air, qu'en tant que ce poids eſt cauſe de la compreſſion de l'air. Si l'air demeure de même poids, & que la compreſſion de ſes parties vienne à augmenter ou à diminuer par quelque cauſe accidentelle, alors le mercure deſcendra ou montera dans le Barométre, quoique

quoique le poids de l'air ne ſoit point augmenté. C'eſt donc à l'augmentation ou à la diminution du reſſort de l'air qu'on doit attribuer les variations du Barométre, plutôt qu'à l'accroiſſement ou à la diminution du poids de l'air; car, ſelon toutes les apparences, le poids de l'air n'eſt pas la ſeule cauſe de la compreſſion des parties de ce Fluide; ſon effet eſt modifié par différentes cauſes, comme par le plus ou moins de chaleur &c.

Recherches ſur la Loi de la denſité, dans les parties d'un Fluide élaſtique qui ſe comprime par ſon propre poids.

78. Soit AB (Figure 28.) une colomne de Fluide dont toutes les parties ayent une égale denſité repréſentée par la ligne conſtante $AF=n$, enſorte que le rectangle $AFGB$ exprime la maſſe de cette colomne. Suppoſons préſentement que ce Fluide, devenu élaſtique, & comprimé par ſon propre poids, ſoit réduit à l'eſpace aB, on demande de la Loi de la denſité depuis A juſqu'en B; denſité qui doit (*art.* 66.) être croiſſante.

Imaginons la Courbe ACM (Fig. 29.) dont les abſciſſes AD repréſentent l'eſpace qu'occupoit une portion quelconque du Fluide avant d'être comprimée, & dont les Ordonnées DM repréſentent l'eſpace dans lequel le Fluide AD a été réduit par la compreſſion; je dis, que le poids ſeul étant ſuppoſé la cauſe de la compreſſion, cette Courbe ACM ſera concave vers AD, & qu'elle coupera l'Axe AB en A ſous un Angle de 45 dégrés. Car 1°. le poids en A étant infiniment petit, la portion

infiniment petite AB ne ſera qu'infiniment peu comprimée, & BC ne différera de AB que d'un infiniment petit du ſecond ordre. 2°. L'eſpace nm dans lequel la portion Dd eſt réduite, ſera d'autant moindre que AD ſera plus grand.

79. Soit $AD = t$, $DM = x$, z la denſité correſpondante à x, $Dd = dt$ & conſtant, on aura $\frac{z}{n} = \frac{dt}{dx}$, & $nt = \int z\,dx$: il ne nous reſte plus qu'à chercher quel doit être le rapport, au moins approché, entre le poids $nt = \int z\,dx$ de la colomne AD, & la compreſſion de la petite particule Dd en nm.

Pour cela, nous imaginerons d'abord un reſſort PR, (Fig. 30.) qui occupant l'eſpace PR dans ſon état naturel, ſoit appuyé contre un obſtacle fixe R; & nous chercherons l'Equation, au moins approchée, de la Courbe PT, dont les Ordonnées ST repréſentent la force avec laquelle le reſſort tend à ſe dilater quand il eſt réduit à occuper les eſpaces correſpondans SR. Il eſt clair 1°. que ſi le reſſort eſt réduit par la force ST à n'occuper que l'eſpace SR, & qu'on veuille le comprimer de nouveau, & le réduire à n'occuper que l'eſpace RV, il faudra employer une nouvelle force. 2°. Que cette force tu, employée à comprimer le reſſort SR dans un eſpace donné SV, ſera d'autant plus grande, que le reſſort SR ſera déja plus comprimé. 3°. Que la force $p\pi$ néceſſaire pour comprimer le reſſort de la quantité Pp, ſera infiniment moindre que tu, néceſſaire pour le comprimer de

la quantité $SV = Pp$. 4°. Qu'il y a un eſpace QR, qui eſt le plus petit auquel le reſſort puiſſe être réduit, & que pour le comprimer davantage, il faudroit une force infinie; d'où il s'enſuit que l'Ordonnée QO doit être infinie. 5°. De plus, ſi l'eſpace QR, le plus petit que le reſſort comprimé puiſſe occuper, peut être regardé comme infiniment petit par rapport à l'eſpace RP qu'il occupe dans ſon état naturel, c'eſt-à-dire, ſi le reſſort eſt capable d'une très-grande compreſſion, comme ſont les Fluides élaſtiques que nous connoiſſons; on pourra ſuppoſer que RQ eſt nulle ou zero; & qu'ainſi l'Ordonnée QO tombe en R. 6°. Enfin nous éprouvons par l'Expérience, que l'air que nous reſpirons ici bas, & qui eſt déja fort comprimé par rapport à ſon état naturel, ſe comprime en raiſon des poids dont il eſt chargé. D'où il s'enſuit qu'en ſuppoſant RS aſſez petite par rapport à RP, il faut que ST ſoit à peu près en raiſon inverſe de RS.

Donc ſi on nomme RP, a, SR, u, ST, y, la valeur de y en u doit être telle 1°. que u décroiſſant, y & ſa différence croiſſe. 2°. Que $a - u$ infiniment petite du premier ordre, rende y infiniment petite du ſecond. 3°. Que $u = 0$ rende $y = \infty$. 4°. Enfin, que u ſuppoſée très-petite par rapport à a, rende y à peu près en raiſon inverſe de u.

Or ſi on fait $y = \frac{(a-u)^2}{aa} + \frac{(a-u)^2}{au}$, cette Equation ſatisfait évidemment à toutes ces conditions. C'eſt pourquoi, comme elle eſt d'ailleurs extrêmement ſimple,

nous la prendrons pour l'Equation approchée que nous cherchons.

Mettant donc à préſent dt pour a, dx pour u, & nt ou $\int z\,dx$ pour la force comprimante y, nous aurons $\int z\,dx = \left(\frac{dt-dx}{dt}\right)^2 + \frac{(dt-dx)^2}{dt\,dx}$. Différentions cette Equation en prenant dt conſtante, & mettons enſuite pour dt ſa valeur $\frac{z\,dx}{n}$, & pour $d\,dx$ ſa valeur $-\frac{n\,dt\,dz}{zz}$ ou $-\frac{dz\,dx}{z}$; & nous aurons cette Equation toute ſéparée entre les x & z; $dx = \frac{2n.(z-n)\,dz}{z^4} + \frac{(z-n)^2\,dz}{nz^3} + \frac{2(z-n)\,dz}{z^3}$.

Si on vouloit prendre les x, non depuis le ſommet, mais depuis le point le plus bas du Fluide, il faudroit mettre $-dx$ pour dx dans l'Equation précédente.

Si on eût ſuppoſé ſimplement $y = \frac{(a-u)^2}{au}$; cette Equation eût auſſi ſatisfait à toutes les conditions énoncées ci-deſſus. Nous n'avons pris l'Equation $y = \frac{(a-u)^2}{aa} + \frac{(a-u)^2}{au}$, que parce qu'elle eſt un peu plus générale, & qu'en ſuppoſant des coefficiens indéterminés aux deux termes du ſecond membre, elle pourroit repréſenter la Loi de la compreſſion des reſſorts, d'une maniere encore plus approchée que la ſimple Equation $y = \frac{(a-u)^2}{au}$.

Il eſt viſible auſſi que pour plus d'exactitude, il faudroit, au lieu du dénominateur au, mettre $a(u - va)$, v exprimant un nombre très-petit, & va l'eſpace auquel le reſſort eſt réduit quand il eſt entiérement bandé, & que ſes parties ſe touchent immédiatement; mais cette préciſion paroît ici ſuperflue, à cauſe de l'extrême petiteſſe qu'on ſuppoſe à va.

REMARQUE I.

80. L'Equation que nous avons donnée ci-deſſus entre y & u, n'ayant été déduite que des propriétés générales des reſſorts comprimés, & une infinité d'Equations pouvant renfermer ces mêmes propriétés, on voit que l'Equation entre les x & les z que nous venons de donner, n'eſt qu'hypothétique, & ne contient que les propriétés générales du rapport entre les x & les z.

On pourroit même faire quelques objections contre le choix que nous avons fait de l'Equation $y = \frac{(a-u)^2}{a^2} + \frac{(a-u)^2}{au}$. Car on pourroit dire, que quand le reſſort paſſe de l'état de compreſſion à celui de dilatation, ſa force dilatative devient contractive, & que quand le reſſort ne peut plus ſe comprimer, ſa force eſt imaginaire : qu'ainſi l'Ordonnée y devroit être imaginaire quand u eſt moindre que QR, & négative quand $u > RP$: conditions qui ne ſauroient convenir à l'Equation propoſée entre y & u.

Mais en premier lieu, quand on formeroit une Equation qui renfermeroit ces nouvelles conditions, la véritable Equation n'en seroit pas plus déterminée pour cela, puisque l'Equation qu'on auroit, ne seroit formée que sur des propriétés qui lui seroient communes avec une infinité d'autres; & l'Equation que nous avons proposée auroit toujours l'avantage de la simplicité. De plus, les idées abstraites de la Géométrie ne devoient pas toujours être transportées dans la Physique; & quoique, par exemple, la force devienne contractive, lorsque $u > a$, ce n'est pas à dire que son expression doive nécessairement être telle, qu'en faisant $u > a$ elle devienne négative. En effet, si on suppose, comme nous l'avons fait, que la force y soit infiniment petite du second ordre, lorsque le ressort est comprimé de la quantité Pp infiniment petite du premier, supposition qui n'a rien que de très-plausible: il s'ensuivra que $a - u$ étant infiniment petite, on aura $y = \frac{(a-u)^2}{a^2}$. Or, cela posé, $u > a$ ne rendroit pas y négative.

REMAQUE II.

81 Si dans l'Equation précédente entre les x & les z, on suppose $n = 1$, & nul par rapport à z, on aura $dx = \frac{dz}{z}$; ou en faisant commencer les abscisses x au point le plus bas, $-dx = \frac{dz}{z}$ & $x = -\log. z$. On peut donc prendre cette Equation pour l'expression du

rapport des denſités, lorſque le Fluide eſt fort comprimé par rapport à ſon état naturel.

Si au lieu de prendre $y = \frac{(a-u)^2}{aa} + \frac{(a-u)^2}{au}$, on eut pris $y = \frac{aa}{u}$, c'eſt-à-dire, la force comprimante en raiſon de la denſité, on auroit trouvé $dx = \frac{dz}{z}$, c'eſt l'Equation des denſités, en les ſuppoſant proportionnelles aux poids comprimans. Mais il faudroit dans cette hypothèſe, que l'origine des x fût à une hauteur infinie, & qu'à cette hauteur la denſité fût zero. Auſſi M. *Varignon* a-t-il déja fait voir (*Mém. Acad.* 1716.) que la Géométrie ſe refuſoit en quelque ſorte à cette hypothèſe.

Au reſte, l'Equation $dx = \frac{dz}{z}$, a lieu non-ſeulement lorſqu'on ſuppoſe la denſité proportionnelle au poids, c'eſt-à-dire, $\int z\,dx = z$, mais encore quand on ſuppoſe $\int z\,dx + A = z$, c'eſt-à-dire, la denſité proportionnelle au poids comprimant augmenté d'un poids conſtant, & cette derniere hypothèſe n'a rien qui répugne, l'origine des x pouvant être dans ce cas à une hauteur finie, & la denſité finie à l'origine des x. Voyez à ce ſujet nos *Recherches ſur la cauſe des Vents*, art. 81. On y trouvera des formules pour les hauteurs de l'Atmoſphére & du Barométre dans cette hypothèſe aſſez ſimple de $\int z\,dx + A = z$. Mais ces formules pourroient devenir beaucoup plus générales, & par conſéquent plus exactes, en ſuppoſant, comme nous avons fait ci-deſſus (*art.* 79.) $\int z\,dx = A(1-\frac{n}{z})^2$

$+ B\frac{(z-n)^2}{nz}$, A, B, & n étant des coefficiens constans, qu'on déterminera par les obſervations. Pour réuſſir encore davantage dans cette recherche, peut-être ſeroit-il bon de faire des Expériences ſur les Loix de la compreſſion & de la dilatation des reſſorts, en chargeant ſucceſſivement un reſſort de différens poids, & en le faiſant auſſi allonger par différens poids; par ce moyen on auroit, en employant une Courbe de genre parabolique ou hyperbolique, l'Equation approchée entre y & u, & de-là l'Equation très-approchée entre les x & les z pour l'Atmoſphère. C'eſt un objet que nous propoſons aux recherches des Géométres-Phyſiciens, & qui paroît aſſez digne de les occuper.

Remarque III.

82. Cependant, quand nous connoîtrions exactement le vrai rapport entre les denſités & les poids comprimans, nous ſerions peut-être encore aſſez éloignés de connoître le vrai rapport des denſités de l'air. Car la compreſſion de l'air & ſa dilatation n'eſt pas cauſée vraiſemblablement par le ſeul poids de ſes parties : le dégré de chaleur de l'air y entre pour beaucoup. Mais comme nous ne pourrions examiner les effets de la chaleur ſans entrer dans des détails trop Phyſiques, & qui nous écarteroient trop de notre ſujet, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur au diſcours de M. *Bernoulli* ſur le mouvement, & à l'Hydrodynamique de M. *Daniel Bernoulli*, où il trouvera ſur cette matiere des Théories ingénieuſes.

LIVRE

LIVRE SECOND.

Du mouvement des Fluides renfermés dans des vaſes.

CHAPITRE I.

Principes généraux pour trouver le mouvement d'un Fluide renfermé dans un vaſe de figure quelconque.

THÉORÊME I.

83. *Si un Fluide* DCPL, (Fig. 31.) *indéfini ou non, coule de* A *vers* B *dans un vaſe de figure quelconque* HGYy, *& qu'on diviſe le Fluide en tranches* CD, KZ, PL *perpendiculaires à* AB; *je dis que la vîteſſe de chaque tranche ſera en raiſon inverſe de ſa largeur, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe en* CD, *par exemple, ſera à la vîteſſe en* PL, *comme* PL *eſt à* CD.

Car ſoient ſuppoſés les eſpaces infiniment petits *CDdc*, *cdϑx*, *PLlp*, *plλπ*, égaux entr'eux : il eſt clair que quand la portion de Fluide *CDdc* parviendra en *cdϑx*, la portion *PLlp* parviendra en *plλπ*. Donc la vîteſſe de *PL* ſera à la vîteſſe de *CD*, comme *Bb* eſt à *Aa*, c'eſt-à-dire, comme *PL* eſt à *CD*, à cauſe que $Bb \times PL = Aa \times CD$.

THÉORÊME II.

84. *Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Théorême précédent, ſoient en général les vîteſſes des différentes tranches du Fluide dans un même inſtant, repréſentées par l'indéterminée* v. *Imaginons que* dv *ſoit l'incrément de* v *dans l'inſtant ſuivant, cette quantité* dv *étant différente pour les différentes tranches, poſitive pour les unes, & négative pour les autres; en un mot, que* $v \mp dv$, *exprime la vîteſſe de chaque tranche, lorſqu'elle prend la place de celle qui eſt immédiatement au-deſſous; je dis que ſi chaque tranche étoit ſuppoſée tendre à ſe mouvoir avec la ſeule vîteſſe infiniment petite* $\pm dv$, *le Fluide reſteroit en équilibre.*

Car puiſque $v = v \mp dv \pm dv$, & que la vîteſſe de chaque tranche eſt ſuppoſée ne point changer de direction, on peut regarder chaque tranche, dans l'inſtant où ſa vîteſſe v ſe change en $v \mp dv$, comme ſi elle étoit animée à-la-fois de la vîteſſe $v \mp dv$, & de la vîteſſe $\pm dv$. Or, puiſque de ces deux vîteſſes elle ne conſerve que la premiere, il s'enſuit que la ſeconde vîteſſe $\pm dv$ doit être telle, qu'elle ne change rien dans la premiere, & par conſéquent qu'elle ſoit anéantie. Donc ſi chaque tranche étoit animée de la ſeule vîteſſe $\pm dv$, le Fluide reſteroit en repos.

REMARQUE I.

85. Il eſt évident que ce Théorême n'eſt autre choſe que l'application de notre Principe général de Dynami-

que au mouvement des Fluides. Comme toutes les Loix du mouvement des Corps ſolides entr'eux ont été réduites par ce Principe aux Loix de l'équilibre de ces mêmes Corps, les Loix du mouvement des Fluides peuvent auſſi ſe réduire par ce même moyen aux Loix de l'équilibre des Fluides. C'eſt ce qu'on verra dans le Chapitre ſuivant.

REMARQUE II.

86. Nous avons ſuppoſé dans le Théorême précédent, que les particules du Fluide n'étoient animées d'aucune force accélératrice, & qu'elles ne changeoient de vîteſſe d'un inſtant à l'autre, qu'en vertu de leur action mutuelle. Mais qu'on les ſuppoſe animées d'une force accélératrice φ, différente, ſi l'on veut, pour chaque tranche; alors il eſt évident qu'à la fin de l'inſtant dt, la vîteſſe v ſeroit $v + \varphi dt$, ſi les tranches n'agiſſoient point les unes ſur les autres. Donc ſi à la fin de l'inſtant dt la vîteſſe v devient $v \pm dv$ par l'action mutuelle des tranches, il faudra ſuppoſer $v + \varphi dt = v \pm dv + \varphi dt \mp dv$; & il eſt évident que le Fluide reſteroit en équilibre, ſi chaque tranche n'étoit animée que de la vîteſſe infiniment petite $\varphi dt \mp dv$.

REMARQUE III.

87. On a regardé dans le Théorême précédent, la vîteſſe v comme compoſée de la vîteſſe $v \mp dv$ & de la vîteſſe $\pm dv$; parce qu'on a ſuppoſé que la vîteſſe de

chaque tranche ne changeoit point de direction, & ne varioit qu'en quantité. Si la vîteſſe v change à-la-fois de direction & de quantité, alors il faudra regarder la vîteſſe v de chaque tranche, comme compoſée de celle que la tranche auroit dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre qui ſeroit détruite. Nous entrerons ci-après dans un plus grand détail là-deſſus.

CHAPITRE II.

Du mouvement des Fluides non élaſtiques dans des vaſes, dont les parois ſont inflexibles.

Préparations pour les propoſitions ſuivantes.

I.

88. SOIT un eſpace indéfini renfermé entre les lignes Courbes quelconques & indéfinies, GP, HL, (Fig. 32.) & diviſé par la ligne indéfinie EB en deux parties, égales ou inégales. Par un point fixe E pris à volonté ſur la ligne EB, ſoit menée la perpendiculaire GH. Imaginons enſuite une Courbe TXV, dont les Ordonnées YX ſoient égales au quarré de la ligne conſtante GH, diviſé par la ligne correſpondante KZ, parallèle à GH; & ſoit appellée N l'Aire de la portion $FTVN$, qui répond à une portion donnée $CDLP$ de l'eſpace indéfini renfermé entre les lignes Courbes GKP, HZL.

Si on ſuppoſe cd infiniment proche de CD, & pl infiniment proche de PL, de maniere que $CDdc = PLlp$, il eſt clair que l'on aura $dN = NVUn - FTtf = \frac{GH^2}{PL} \times \frac{Ff \times CD}{PL} - \frac{GH^2}{CD} \times Ff = Ff.GH^2.\left(\frac{CD^2 - PL^2}{PL^2.CD}\right)$.

II.

89. En général, que les Ordonnées YX ſoient égales à $\frac{GH^2}{KZ}$ multiplié par une fonction donnée de l'Aire correſpondante $CDZK$: ſoit nommée z cette Aire, Z la fonction donnée, & $\zeta\, dz$ la différence de cette fonction, il eſt évident, que ſi on ſuppoſe l'origine des Aires z en cd, après l'avoir ſuppoſée en CD, alors YX ſe changera en $Yx = \frac{GH^2}{KZ} \times (Z - \zeta.\, CDdc)$. Donc $Xx = \zeta.\, CDdc$. Donc ſi on nomme AO ou FY, x, N ce que devient $\int \frac{GH^2.Z\,dx}{y}$ lorſque $x = AB$, A ce que devient Z quand $x = o$, B ce que devient Z, & D ce que devient $GH^2 \int \frac{\zeta\, dx}{y}$, quand $x = AB$, on aura $\theta tVv = CDdc \times D$, & $dN = NVUn - FTtf - \theta tVv = Ff.GH^2\left(\frac{B.CD^2 - A.PL^2}{PL^2.CD}\right) - Ff.D.DC$.

Du mouvement d'une portion donnée de Fluide non peſante, dans un vaſe indéfini

PROBLÊME I.

90. *Suppoſons qu'une quantité donnée de Fluide* CDLP,

(Fig. 32.) *homogene & ſans peſanteur, miſe en mouvement par une cauſe quelconque, comme par l'impulſion d'un piſton, coule ſuivant* AB *dans un vaſe indéfini; on demande la vîteſſe de ce Fluide à chaque inſtant.*

Comme la vîteſſe de chaque tranche eſt (*art.* 83.) en raiſon inverſe de ſa largeur, il eſt clair qu'il ſuffira de trouver qu'elle eſt à chaque inſtant la vîteſſe d'une des tranches, par exemple, de la ſurface CD, pour avoir celle de toutes les autres.

Or, imaginons que le Fluide s'étende juſqu'à la ligne fixe GH, & nommons u la vîteſſe qu'auroit en ce cas-là la tranche GH, nous aurons $\frac{u.GH}{CD}$ pour celle de CD. Toute la difficulté ſe réduit donc à connoître u, puiſque GH eſt conſtante, & que la vîteſſe de la tranche variable CD, ſera toujours à celle de la tranche fictive GH, comme GH à CD.

Soit ſuppoſé le Fluide $CDLP$ diviſé en portions infiniment petites $CDdc$, $KZz\,k$, &c. qui contiennent une égale quantité de Fluide, & ſoit appellée dx la hauteur, y la largeur indéterminée de chacune de ces portions, ydx ſera donc conſtant.

Suppoſons préſentement que le Fluide ſoit parvenu dans la ſituation $cdlp$, de maniere que chaque tranche ait pris la place de celle qui la précédoit immédiatement. Soit v la vîteſſe indéterminée de chaque tranche, lorſque le Fluide occupe l'eſpace $CDLP$; & que dans l'inſtant ſuivant cette vîteſſe ſe change en $v \mp dv$, ou ſim-

plement en $v - dv$ (dv étant prise pour une quantité indéterminée qui soit indifféremment positive ou négative ;) il est évident (*art.* 84.) que si chaque tranche tendoit à se mouvoir avec la vîtesse dv, le Fluide seroit en équilibre, c'est-à-dire, qu'on auroit (*art.* 25.) $\int dv\,dx = o$, ou $\int \frac{y\,dx\,.\,dv}{y} = o$. Mais $v = \frac{u\,.\,GH}{y}$; il faut donc que $\int \frac{y\,dx\,.\,v\,dv}{u\,.\,GH}$ soit zero ; ou, ce qui est la même chose, il faut que $\int y\,dx\,.\,v\,dv = o$, parce que GH est constante, & que u est constante aussi par rapport aux indéterminées v & dv, qui dans un même instant sont différentes pour chaque tranche. Donc puisque $y\,dx$ est constant, il s'ensuit que si on nomme V la vîtesse de chaque tranche dans l'instant, qui suit celui où la vîtesse étoit v, on aura $\int y\,dx\,(VV - vv) = o$. ou $\int y\,dx\,.\,VV = \int y\,dx\,.\,vv$. donc $\int y\,dx\,.\,vv$ doit être constant. Donc $\int \frac{y\,dx\,.\,uu\,.\,GH^2}{yy}$ ou $uu \int \frac{dx\,.\,GH^2}{y}$ doit être une quantité constante : donc mettant pour $\int \frac{dx\,.\,GH^2}{y}$ sa valeur N (*art.* 88.) on aura Nuu égale à une constante, ou $2PL^2\,.\,CD\,.\,Nudu + uu\,.\,Ff\,.\,GH^2\,(CD^2 - PL^2) = o$.

Nomenclature.

91. Avant que d'aller plus loin, nous croyons devoir insérer ici, pour plus de facilité & de netteté, la plûpart des noms dont nous nous servirons dans la suite.

Nous appellerons toujours
la ligne conſtante GH ..... m
la ſurface ſupérieure CD du Fluide ..... k
la ſurface inférieure PL ..... K
la diſtance AB de ces deux ſurfaces ..... q
une tranche quelconque KZ ..... y
AO, diſtance de KZ à CD x
la vîteſſe indéterminée de la tranche KZ v
l'Aire $CDZK$ ..... z
la vîteſſe de la tranche fictive GH ..... u
ce que devient $\int \frac{GH^2\,dx}{y}$ lorſque $AO = AB$ ..... N
le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, t

COROLLAIRE I.

92. Puiſque (*ſolut. précéd.*) $\int y\,dx : vv$ eſt toujours conſtant, il eſt clair que la ſomme des produits de chaque tranche par le quarré de ſa vîteſſe, fait toujours une quantité conſtante. On voit donc que le principe de la conſervation des forces vives a lieu auſſi dans les Fluides.

COROL. II.

93. Comme la quantité de Fluide qui coule dans le Tuyau indéfini propoſé demeure toujours la même, il s'enſuit que ſi on nomme s l'eſpace parcouru pendant un tems quelconque t par la ſurface CD, la quantité N ſera toujours donnée en s. Donc ſi on fait en genéral $N = S$, S exprimant une fonction de s, on aura $S\,uu =$ à une conſtante

conſtante A, & $u = \sqrt{\frac{A}{S}}$. donc $dt = \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{A}}$, & $t = \int \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{A}}$.

REMARQUE I.

Où l'on détermine la premiere vîteſſe imprimée au Fluide.

94. Pour déterminer la conſtante A dans l'article précédent, il faut ſçavoir ce qu'eſt Suu, lorſque le Fluide commence à ſe mouvoir.

Soit $ILDC$ (Fig. 33.) un Piſton, dont j'appelle la maſſe μ, α la vîteſſe avec laquelle le Piſton eſt pouſſé, $CDLP$ le Fluide, dont je ſuppoſe que δ ſoit la denſité, $\mathfrak{C}$ la vîteſſe que doit avoir GH, & par conſéquent $\frac{\mathfrak{C}.GH}{CD}$ celle que doit avoir CD, & $\frac{\mathfrak{C}.GH}{y}$ celle que doit avoir une tranche quelconque, je dis qu'on aura

$$\mu.GH(CD.\alpha - \mathfrak{C}.GH) = CD^2.\mathfrak{C}.\delta.N.$$

Car la vîteſſe du Piſton, après qu'il a communiqué du mouvement au Fluide, doit être égale à celle de la premiere tranche CD, c'eſt-à-dire, à $\frac{\mathfrak{C}.GH}{CD}$. On peut donc dans l'inſtant de l'impulſion, regarder la vîteſſe α du Piſton comme compoſée de la vîteſſe $\frac{\mathfrak{C}.GH}{CD}$ qu'il doit conſerver, & de la vîteſſe $\alpha - \frac{\mathfrak{C}.GH}{CD}$ qu'il doit perdre. De plus, comme le Fluide eſt en repos dans l'inſtant de l'impulſion, on peut regarder chaque tranche comme animée

de la vîteſſe $+\frac{\zeta . GH}{y}$ qu'elle doit avoir, & de la vîteſſe $-\frac{\zeta . GH}{y}$ qui doit être détruite. Donc il faut que les tranches du Fluide animées de la vîteſſe $-\frac{\zeta . GH}{y}$ faſſent équilibre au Piſton animé de la vîteſſe $\alpha - \frac{\zeta . GH}{CD}$. d'où l'on tirera l'Equation

$\mu . GH . (CD . \alpha - \zeta . GH) = CD^2 . \zeta . \delta . N$,

& par conſéquent la valeur de ζ.

J'obſerverai ici qu'on ne pourroit dans le cas préſent, employer le Principe de la conſervation des forces vives pour trouver la vîteſſe du Fluide au premier inſtant. Car il faudroit pour cela que $\mu (\alpha . CD - \zeta . GH)^2 + \zeta\zeta\delta . N \times CD^2$ fut $= \mu\alpha\alpha\, CD^2$ ou que $-2\mu . \alpha . CD . GH + \mu . \zeta . GH^2 + N . CD^2 . \zeta . \delta$ fut $= 0$: ce qui ne donneroit pas pour ζ la valeur que l'on tire de l'Equation précédente. Auſſi, comme nous l'avons déja obſervé dans notre *Traité de Dynamique*, le Principe de la conſervation des forces vives n'a lieu que dans le mouvement des Corps, dont la vîteſſe à chaque inſtant change infiniment peu.

REMARQUE II.

Où l'on donne d'autres manieres de réſoudre le Problême précédent.

95. Pour déterminer dans le Problême précédent la quantité $\int dx\, dv$, qui, comme nous avons vû, doit

être = 0, nous nous ſommes ſervis d'une Méthode qui nous a conduit au Principe de la conſervation des forces vives; c'a été principalement dans le deſſein de retrouver ce Principe dans notre ſolution, & d'en faire voir l'accord avec celle de M. *Daniel Bernoulli*, que nous avons ſuivi cette route, & donné une conſtruction ſemblable à celle de ce Savant Géométre. Car on pourroit déterminer par bien d'autres Méthodes la quantité $\int dx\,dv$. En voici quelques-unes.

Premiere maniere.

96. Puiſque $v = \frac{u.GH}{y}$, on aura $dv = \frac{(y\,du - u\,dy).GH}{y^2}$, & $\int dx\,dv = \int \frac{dx\,du.GH}{y} - \int \frac{u.GH.dx\,dy}{y^2} = GH.du\int \frac{dx}{y} + u.GH.ydx\int -\frac{dy}{y^3} = \frac{GH.N\,du}{GH^2} + \frac{Ff.u.GH}{2CD.PL^2}.(CD^2 - PL^2)$; d'où l'on tire, en faiſant $\int dx\,dv = 0$, la même Equation que ci-deſſus

$$2PL^2.CD.N\,u\,du + Ff.uu.GH^2(CD^2 - PL^2) = 0.$$

Seconde maniere.

97. Imaginons la Courbe TXV (Fig. 34.) dont les Ordonnées FT, YX, NV, repréſentent les vîteſſes des tranches correſpondantes dans un inſtant quelconque; & ſuppoſons que dans l'inſtant ſuivant, lorſque CD eſt parvenu en cd, KZ en kz, PL en pl (les eſpaces $CDdc$, $KZzk$, $PLlp$, étant égaux) les vîteſſes FT, YX, NV,

ſoient changées en ft, yx, nu, & la Courbe TXV en tux: il eſt évident que la différence de YX ſur yx, ſera ce que nous avons appellé dv. Donc ſi on nomme dv, la différence de YX ſur $y\xi$, on aura $dv = \xi x + dv$, & $\int dx\,dv$ ſera $\int \xi x \times Yy + \int dx\,dv$, laquelle quantité doit être $= o$.

Or, en premier lieu, je remarque que ξx eſt en raiſon conſtante avec ξy. Car $y\xi : \delta n :: GH : kz :: yx : \delta\varepsilon$; donc $\int \xi x \times Yy = \frac{ne}{\delta n} \times \int Yy \times YX = \frac{du}{u} \int v\,dx$ $= \frac{du}{u} \int \frac{u.GH.dx}{y} = du.GH \int \frac{dx}{y} = \frac{N\,du}{GH}$. A l'égard de la quantité $\int dx\,dv$, on la changera en $\int \frac{y\,dx.v\,dv}{u.GH} = \frac{y\,dx}{u.GH}$ $\times \int v\,dv = \frac{y\,dx}{2u.GH} \times (YX^2 - FT^2) = \frac{y\,dx}{2uGH.KZ^2.CD^2}$ $\times (uuGH^2.CD^2 - uuGH^2.KZ^2)$. Donc mettant PL pour KZ, & $Ff.CD$ pour $y\,dx$, on aura $2PL^2.CD.N\,du\,du + uu.Ff.GH^2(CD^2 - PL^2) = o$.

Nous avons ſuppoſé que dv étoit égal à $\xi x + dv$; ce qui eſt évident, lorſqu'on ſuppoſe la Courbe $t\,x\,u$ extérieure à la Courbe TXV, ainſi que nous l'avons ſuppoſé dans la préſente Figure. Mais ſi la Courbe $t\,x\,u$ étoit intérieure à TXV, ou, pour parler plus clairement, ſi la vîteſſe ft de cd étoit moindre que la vîteſſe FT de CD, ce qui doit arriver dans pluſieurs cas, comme on le verra dans l'article ſuivant; alors on auroit $dv = \xi x - dv$, ou plutôt $dv = -\xi x - dv$, parce que ξx ſeroit alors

négative; & il n'y auroit aucun changement à faire au calcul précédent.

REMARQUE III.

Où l'on examine dans quel cas le Fluide doit ceſſer d'être continu dans le vaſe, & ſe diviſer en deux ou pluſieurs portions.

98. Pour que le Fluide ſoit en équilibre, chaque tranche étant animée de la vîteſſe dv, il faut (*art.* 24.) que cette vîteſſe dv ſoit dirigée ſuivant AB (Fig. 32.) pour la tranche CD, & ſuivant BA pour la tranche PL; c'eſt-à-dire que la vîteſſe de CD doit, ou demeurer la même, ou diminuer, & celle de PL demeurer la même, ou augmenter. Donc ſi on nomme CD, k, & PL, K, il faudra que $d\left(\frac{u.GH}{k}\right)$ ſoit zero ou négatif, & que $d\left(\frac{u.GH}{K}\right)$ ſoit zero ou poſitif. Donc $\frac{du}{u}$ doit être $=$ ou $> \frac{dK}{K}$, & $=$ ou $< \frac{dk}{k}$; c'eſt-à-dire, (à cauſe que Nuu conſtant rend $\frac{du}{u} = -\frac{dN}{2N}$) qu'il faut que $\frac{dk}{k} =$ ou $> -\frac{dN}{2N} =$ ou $> \frac{dK}{K}$, pour que la ſolution du Problême précédent ſoit bonne. Cette ſolution ne pourroit donc avoir lieu, ſi, par exemple, $\frac{dk}{k}$ étoit $< \frac{dK}{K}$, c'eſt-à-dire, ſi $\frac{k}{K}$ alloit en diminuant.

Une ſeconde condition qui doit encore être obſervée

néceſſairement, & qui renferme même la précédente, c'eſt que la quantité $\int dx\,dv$, dont les deux valeurs extrêmes ſont zero, ſavoir, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = AB$, n'ait aucune valeur négative, en ſuppoſant $x < AB$. Autrement (*art.* 24.) il ne pourroit ſe faire que les tranches du Fluide animées des vîteſſes dv fuſſent en équilibre.

99. Mais que doit-il donc arriver, ſi ces conditions ne ſont pas obſervées? Pour le découvrir, nous remarquerons que dans la ſolution du Problême, il a été ſuppoſé que chaque tranche prenoit toujours la place de celle qui la précédoit, & que le Fluide, en changeant de place dans le vaſe, formoit toujours une maſſe unique & continue: dans ce cas, la ſolution du Problême ne peut être autre que celle que nous avons donnée; donc puiſque cette ſolution ceſſe d'être bonne, lorſque les deux conditions mentionnées ci-deſſus ne ſont pas obſervées, il s'enſuit néceſſairement qu'alors le Fluide ceſſe d'être continu dans le Tuyau, & doit ſe diviſer en différentes portions ſéparées les unes des autres.

En effet, le Fluide ne forme en coulant une maſſe continue, que lorſque les parties ſupérieures peuvent agir ſur les inférieures. Donc, abſtraction faite de toute force accélératrice, la partie CD doit perdre de ſa vîteſſe, tandis que celle de PL doit augmenter.

Pour mieux nous faire entendre, ſuppoſons que deux Corps ſolides ſoient contigus l'un à l'autre, & qu'on leur donne à chacun une impulſion différente ſuivant la mê-

me ligne droite. Si le Corps antérieur a reçu une vîteſſe moindre que le poſtérieur, il y aura une action entre ces deux Corps, & ils ſe mouvront tous deux en ne formant qu'une même maſſe, avec une vîteſſe commune, plus grande que la vîteſſe imprimée à l'antérieur, & moindre que la vîteſſe donnée au poſtérieur : au contraire, ſi le Corps antérieur a reçu plus de vîteſſe que le poſtérieur, ces deux Corps ſe ſépareront & ſe mouvront, chacun avec la vîteſſe qu'il a reçue, ſans que le mouvement imprimé à l'un change rien au mouvement donné à l'autre. De même un Fluide doit ceſſer de former une maſſe continue, lorſque la vîteſſe des parties inférieures eſt telle par rapport à celle des parties ſupérieures, que celles-ci ne peuvent agir ſur celle-là.

Il eſt certain néanmoins que l'adhérence des particules du Fluide entr'elles doit apporter ici quelque changement, & qu'un Fluide, par exemple, renfermé dans un vaſe Cylindrique, & dont la partie inférieure tendroit à ſe mouvoir plus vîte que la ſupérieure, pourroit former toujours une maſſe continue, ſi l'adhérence des parties étoit aſſez grande pour que la partie inférieure pût entraîner la ſupérieure. Mais il faut obſerver que nous faiſons ici abſtraction de l'adhérence des parties, & nous aurons lieu d'examiner plus au long dans la ſuite, ce qu'elle doit changer à la régle que nous venons d'établir.

M. *Daniel Bernoulli* eſt le premier que je ſache, qui ait remarqué qu'une maſſe fluide coulant dans un Tuyau devoit dans certains cas, ceſſer d'être continue : nous par-

lerons plus bas de la Théorie qu'il a donnée sur ce sujet.

Ce seroit ici le lieu de déterminer en quels endroits le Fluide doit se séparer, lorsqu'il ne sauroit former en coulant une masse continue; mais pour ne point interrompre la suite de nos propositions, nous remettrons à traiter ce sujet dans un article séparé, que l'on trouvera à la fin de ce Chapitre.

Du mouvement d'un Fluide pesant dans un vase indéfini.

PROBLÊME II.

100. *Les mêmes suppositions étant faites que dans le Problême I.* (art. 90.) *avec cette condition de plus, que toutes les parties du Fluide* C D L P (Fig. 32.) *soient animées par une pesanteur donnée* p; *on demande la Loi de son mouvement.*

Il est évident (*art.* 86.) que dans ce cas $\int dx.(pdt-dv)$ doit être égale à zero, c'est-à-dire, (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$), que $\int\frac{pydx^2}{vy}=\int\frac{ydx.dv}{y}$, ou $ydx.\int pdx=\int ydx.vdv$ en mettant pour y sa valeur $\frac{u.GH}{v}$ dans les dénominateurs; donc en suivant la même route que dans l'*art.* 90, on trouvera $2\,Ff.CD.p.AB=d(Nuu)$; équation qui étant combinée avec l'Equation $dt=\frac{Ff.GH}{u.GH}$, donnera la valeur de u à chaque instant.

COROLLAIRE I.

101. Il est clair que l'Equation $\int ydx.pdx=\int ydx.vdv$, renferme

renferme la Loi de la conſervation des forces vives.

Si on veut donner à l'Equation $2Ff.CD.p.AB = d(Nuu)$ une forme plus commode ; il n'y a qu'à ſuppoſer $Ff.CD.p.AB = pMdh$, en appellant M la maſſe donnée du Fluide, & l'on aura $Nuu = 2pMh$. On remarquera que dans l'Equation $Mdh = Ff.CD.AB$, dh exprime la quantité dont le centre de gravité de la maſſe fluide deſcend à chaque inſtant.

COROLLAIRE II.

102. Nous avons ſuppoſé que la vîteſſe du Fluide commençoit à zero ; c'eſt pour cela que nous n'avons point ajouté de conſtante dans les intégrations précédentes : mais ſi le Fluide avoit été mis en mouvement par quelque cauſe, comme par l'impulſion d'un Piſton, il auroit fallu ſuppoſer $Nuu = 2pMh + A$, A étant une conſtante qu'on détermineroit par la Méthode de l'article 94.

COROLLAIRE III.

103. Nous avons vû dans la ſolution du Problême précédent, que pour que le Fluide formât en coulant dans le Tuyau une maſſe continue, il falloit que la vîteſſe de la tranche CD dans un inſtant quelconque, fût moindre ou la même (*art.* 98.) que celle qu'elle auroit eue dans cet inſtant, ſi elle avoit pû ſe mouvoir librement ; & qu'au contraire la vîteſſe de PL fût la même ou plus grande que celle que PL auroit eue en ſe mouvant librement.

D'où il s'enſuit, que dans le cas préſent $\frac{p\,dx}{v} - dv$ doit être pour CD une quantité nulle ou poſitive, & pour PL une quantité nulle ou négative. Donc il faut 1°. que $2p \cdot Ff$ ſoit $=$ ou $> d\left(\frac{uu:GH^2}{kk}\right)$. 2°. Que $2p \cdot Bb$ ou $\frac{2p \cdot Ff \cdot CD}{PL}$ ſoit $=$ ou $< d\left(\frac{uu \cdot GH^2}{KK}\right)$.

En général, il faut (*article* 24.) que la quantité $\int dx\left(\frac{p\,dx}{v} - dv\right)$ dont les deux valeurs extrêmes ſont $= 0$, n'ait aucune valeur négative en ſuppoſant $x < AE$.

PROBLÊME III.

104. *Suppoſant que le Fluide* C D L P (Fig. 32.) *ſoit compoſé de Couches de differentes denſités, & même, ſi l'on veut, de différentes peſanteurs, on demande le mouvement de ce Fluide dans un vaſe indéfini.*

Soit π la peſanteur & δ la denſité indéterminée de chaque tranche, il faudra que $\int \delta\, dx\left(\frac{\pi\, dx}{v} - dv\right) = 0$; c'eſt-à-dire, que $\int \delta y\, dx \cdot \pi\, dx = \int \delta y\, dx \cdot v\, dv$.

Il eſt clair que la denſité & la peſanteur indéterminée de chaque tranche, ne ſauroient être données ici par une fonction de la diſtance de ces tranches à la ſurface, ou par une fonction de la largeur de la tranche. Car, quoiqu'on ſuppoſe ici que les tranches de différente denſité ne ſe mêlent pas, & qu'elles conſervent leur paralléliſme; néanmoins il eſt évident qu'à cauſe de la figure du vaſe,

la distance & la largeur de deux tranches de densité donnée varient d'un instant à l'autre : il n'y a que le volume de Fluide contenu entre deux tranches de densité donnée, qui ne varie point, comme il est aisé de le voir : d'où il s'ensuit que la densité & la pesanteur d'une tranche quelconque KZ ne peuvent s'exprimer que par des fonctions de l'Aire $CDZK$. Soit KZ, y, $CDZK, z$, $\delta = Z, \pi = Z, Z$ & Z exprimant des fonctions données de z, M la masse du Fluide, $N =$ à ce que devient $\int \frac{GH^2 . Z dx}{y}$ lorsque $x = AB$, P égale à ce que devient dans le même cas $\int Z Z dx$; enfin $Py dx = M dh$; on aura $2Mh = Nuu$, Equation qui renferme encore la Loi de la conservation des forces vives.

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase de grandeur finie.

Problême IV.

105. *Trouver la vîtesse d'un Fluide pesant & homogene qui s'échappe d'un vase donné* GPLH (Fig. 35.) *par l'ouverture horizontale* PL.

Il est évident que la vîtesse du Fluide qui sort par PL sera sensiblement la même, que si le vase étoit supposé continué en Pp, Ll (Fig. 36.); d'où l'on voit que ce Problême se réduit au précédent Problême II, & qu'on aura $2 . CDdc . p . AB = 2Nudu + uudN$.

Soit comme dans l'*art.* 91, $GH = m$, $PL = K$, $CD = k$, $AB = q$, $uu = 2ps$; on aura $Ff = -dq$, &

mettant pour dN sa valeur trouvée ci-dessus, *art.* 88, on aura $KKkNds - kkmmsdq + KKmmsdq = -KKkkqdq$; équation conforme à celle qu'a trouvée M. *Daniel Bernoulli*, par le Principe de la conservation des forces vives.

Corollaire I.

106. Si le Fluide étoit composé de tranches de différentes densités & de différentes pesanteurs, alors conservant les noms des *art.* 89 & 104, & mettant pour dN sa valeur trouvée *article* 89, on auroit $-KKkkPdq = -kkpmmBsdq + KKkNpds + KKpmmAsdq + KKkkDpsdq$.

Corol. II.

107. Si φ est la pesanteur qui anime la tranche PL; & qu'on fasse $\frac{mm}{KK} ps = \varphi r$, afin d'avoir la hauteur r, d'où la tranche PL devroit tomber, étant animée de la force φ, pour acquérir la vîtesse actuelle qu'elle a; on trouvera $-kkmmPdq = kN.KK\varphi dr - mm\varphi rdq(Bkk - AKK) + KKkk\varphi Ddq$.

Corol. III.

108. Si K est supposé fort petit, on aura P ou $\int ZZdx = \varphi B.r$, c'est-à-dire, $PL.\int \pi\delta dx = PL.\varphi.B.r$; le premier membre de cette Equation exprime la pression que soutiendroit PL si le vase étoit fermé; le second

exprime la preſſion que ſoutiendroit ce même fond PL, s'il étoit chargé d'une colomne de Fluide dont la baſe fût PL, la hauteur r, & dont les parties euſſent une denſité B, & une peſanteur φ égale à celle du Fluide qui ſort; ce qui s'accorde avec le §. 11. Sect. 3. de l'Hydrodynamique de M. *Bernoulli*.

Lorſque le Fluide eſt homogene & d'une peſanteur p conſtante pour toutes les parties, on a $AB = r$; c'eſt-à-dire, que *le Fluide ſort, quand l'ouverture eſt fort petite, avec une vîteſſe qui eſt la même que celle qu'il auroit acquiſe, en tombant d'une hauteur égale à celle de la ſurface ſupérieure du Fluide au-deſſus de l'ouverture.*

SCOLIE.

109. L'Expreſſion que nous venons de donner dans l'article précédent, de la vîteſſe du Fluide qui ſort d'un vaſe dont le trou eſt fort petit, n'eſt pas exactement vraie, & eſt même fort différente de la véritable expreſſion de la vîteſſe au commencement du mouvement.

Pour le faire voir, reprenons l'Equation

$$KKkNds - kkmmsdq + KKmmsdq = -KKkkqdq;$$

& ſuppoſons, afin de ſimplifier le calcul, que la conſtante $GH(m)$ ſoit l'ouverture même $PL(K)$, auquel cas la quantité s ſera la hauteur dûe à la vîteſſe du Fluide qui ſort par PL : en prenant c pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, on aura en général

$$s = \int \frac{-kqdq}{N} c^{\int(-k^2dq + K^2dq):kN} c^{\int(-k^2dq + K^2dq):kN} :$$

Si K eſt ſuppoſée infiniment petite, alors N qui eſt $\int \frac{K^2 dx}{y}$ deviendra infiniment petite d'un ordre inférieur; de plus, on pourra négliger dans l'Equation précédente la quantité $K^2 dq$ qui eſt toujours nulle par rapport à $k^2 dq$, & l'Equation deviendra

$$sc^{\int(-kdq):N} = \int \frac{-kqdq}{N} C^{\int(-kdq):N}.$$

Si on ſuppoſe que q ſoit $= a$ au commencement du mouvement, & qu'en général $q = a - q$, on aura, tant que q & a différeront peu l'un de l'autre,

$$ks = kq - kac^{(-kq):N} + N - Nc^{(-kq):N}.$$

Lorſque k q eſt infiniment grande par rapport à N, ce qui arrive dès que q eſt infiniment petite du premier ordre, alors $s = q$: au contraire, tant que k q eſt infiniment petite par rapport à N, on a,

$$s = \int \frac{-kqdq}{N} = \frac{k}{N} \times aq.$$

Cette derniere Equation fait voir que la ſurface CD au commencement du mouvement, ſe meut avec une viteſſe uniformément accélerée, comme font les Corps peſans qui tombent librement.

Donc en général, ſuppoſant q fort petit, on voit que le temps que la ſurface CD met à s'abaiſſer de la quantité q, eſt $> \int \frac{-dq \cdot k}{K\sqrt{[2pq]}}$, c'eſt-à-dire, que ce temps eſt $> \frac{kq}{K\sqrt{[2pa]}}$; cependant il ne doit pas être beaucoup

plus grand. Car $\sqrt{[2pq]}$ est l'expression de la vîtesse dès que q commence à être infiniment petite du premier ordre : de plus, lorsque q est infiniment petite du troisiéme, alors l'expression du temps est $\int \frac{k\,dq\sqrt{N}}{K\sqrt{[2p.kaq]}} = \frac{2k\sqrt{[Nq]}}{K\sqrt{[2p.ak]}}$ qui est infiniment petite de l'ordre $\frac{3}{2}$. Donc puisque l'expression du temps $\frac{kq}{K\sqrt{[2ap]}}$ est finie, lorsque q est infiniment petite du premier ordre ; il s'ensuit que lorsque q est infiniment petite du second ordre, l'expression moyenne doit être infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{kq}{K\sqrt{[2ap]}}$ peut être regardée comme exprimant le temps de la descente à un infiniment petit près.

Nous remarquerons, au reste, qu'on ne sauroit supposer que $\sqrt{[2pq]}$ exprime la vîtesse du Fluide qui sort par PL, à moins que le temps que la surface CD met à s'abaisser d'une quantité q infiniment petite du premier ordre, ne soit très-petit. Or, comme les Corps pesans tombent de 15 pieds en une seconde de temps, il s'ensuit qu'en général, le temps que la surface CD met à s'abaisser d'une quantité égale à q, est à une seconde de temps :: kq est à $2K\sqrt{[a.15.]}$. Donc on ne peut prendre $\sqrt{[2pq]}$ pour l'expression de la vîtesse du Fluide qui sort par PL, que dans le cas ou kq ne différe pas beaucoup de $2K\sqrt{[a.15]}$; k, q, K, a, étant supposées exprimées en pieds & en parties de pieds.

Il est bon de remarquer que N étant $= \int \frac{K^2\,dx}{y}$, peut

être supposé $= \lambda K^2$, tant que q est fort petit, c'est-à-dire, tant que la surface CD n'est descendue que d'une quantité fort petite; dans cette expression λK^2, λ est un nombre constant $= \int \frac{dx}{y}$; d'où l'on voit qu'au commencement du mouvement $s : q :: ka : \lambda K^2$, & qu'ainsi à moins que λ ne fût très-grand, s sera très-grand par rapport à q; la vîtesse du Fluide à la surface CD est donc $\frac{K\sqrt{2ps}}{k} = \frac{\sqrt{2paq}}{\sqrt{\lambda k}} = \sqrt{2p} \times \frac{\sqrt{aq}}{\sqrt{\lambda k}}$, c'est-à-dire, proportionnelle à $\sqrt{2p}q$. Ainsi, quoique la surface CD s'accélere d'abord suivant une Loi semblable à celle des Corps pesans qui tombent librement, elle s'accélere cependant plus ou moins vîte, selon que a est $>$ ou $< \lambda k$.

En général, supposant $N =$ à peu près λK^2, c'est-à-dire, q ou $a - q$ fort petit, on aura $ks = kq - kac^{\frac{-kq}{\lambda K^2}} + \lambda K^2 - \lambda K^2 c^{\frac{-kq}{\lambda K^2}} =$ à très-peu près $kq - kac^{\frac{-kq}{\lambda K^2}}$, en supposant λK^2 très-petit par rapport à ka; donc $s = q - ac^{\frac{-kq}{\lambda K^2}}$; or tant que kq n'est pas très-grand par rapport à λK^2, on peut supposer $c^{\frac{-kq}{\lambda K^2}} = 1 - \frac{kq}{\lambda K^2} + \frac{k^2q^2}{2\lambda^2 K^4} - \frac{k^3q^3}{2.3\lambda^3 K^6}$ &c. Donc à cause de $q = a - q$, on aura $s = -q + \frac{kaq}{\lambda K^2} - \frac{k^2aq^2}{2\lambda^2 K^2} + \frac{k^3aq^3}{2.3\lambda^3 K^3}$ &c. c'est-à-dire, à cause de

de ka (*hyp.*) beaucoup plus grand que λK^2, (puiſque K eſt ſuppoſée infiniment petite, & que k, a, λ ſont finis), $s =$ à très-peu près $\frac{kaq}{\lambda K^2} - \frac{k^2a^2q^2}{2\lambda^2K^2} + \frac{k^3aq^3}{2.3\lambda^3K^3}$, &c. qui ſe réduit encore à $\frac{kaq}{\lambda K^2}$, lorſque q eſt ſi petite que $\frac{kaq}{\lambda K^2}$ eſt peu conſidérable.

Cette analyſe peut ſervir à faire comprendre, comment & par quels degrés s paſſe de la valeur $\frac{kaq}{\lambda K^2}$ à la valeur q.

Au reſte, on peut encore trouver d'une maniere très-ſimple la vîteſſe de la tranche CD au commencement du mouvement; ſoit du cette vîteſſe, on aura $\frac{kdu}{y}$ pour la vîteſſe d'une tranche quelconque; donc $\int\left(pdt - \frac{kdu}{y}\right)dx = 0$, ou $du = \frac{padt}{\int\frac{kdx}{y}}$; & la vîteſſe de la tranche inférieure PL ſera $= \frac{kdu}{K} = \frac{padt}{\int\frac{Kdx}{y}}$; ce qui s'accorde avec nos formules; mais il faut remarquer que la vîteſſe de la tranche ſupérieure CD doit être $<$ ou $= pdt$, & celle de la tranche inférieure $PL =$ ou $> pdt$, afin que l'équilibre ſubſiſte (*art.* 98.); donc a doit être $=$ ou $< \int\frac{kdx}{y}$; & $=$ ou $> \int\frac{Kdx}{y}$; donc $\frac{a}{k}$ doit être $=$ ou $< \int\frac{dx}{y}$; & $\frac{a}{K} =$ ou $> \int\frac{dx}{y}$.

REMARQUE

Où l'on examine les ſuppoſitions qui ont été faites dans la ſolution des Problêmes précédens.

110. Les ſolutions que nous avons données des quatre Problêmes précédens, ſont appuyées ſur deux ſuppoſitions. 1°. Que les différentes tranches du Fluide conſervent exactement leur parallélisme, enſorte qu'une tranche prenne toujours la place de celle qui la précéde. 2°. Que la vîteſſe de chaque tranche ne varie point en direction, c'eſt-à-dire, que tous les points d'une même tranche ſont ſuppoſées avoir une vîteſſe égale & parallèle à *AB*.

La premiere ſuppoſition n'a rien qui ne ſoit très-plauſible, & même eſt en quelque ſorte confirmée par l'Expérience. Car quand l'eau s'échappe d'un vaſe par une ouverture quelconque, la ſurface ſupérieure de l'eau demeure toujours ſenſiblement plane & horizontale, au moins tant que cette ſurface n'eſt pas arrivée à une diſtance fort petite de l'ouverture du vaſe. Or il me ſemble qu'il eſt aſſez naturel de conclure de-là, que les tranches du Fluide conſervent leur parallélisme. Car il ſeroit aſſez difficile de concevoir comment la premiere tranche conſerveroit ſon parallélisme, ſi les tranches intérieures du vaſe ne conſervoient pas le leur. D'ailleurs il ne paroît point qu'il y ait de raiſon, pour que la tranche ſupérieure conſerve ſon parallélisme plutôt que les autres. Au contraire, comme les parties des Fluides ont entr'elles une

certaine adhérence, la premiere tranche ne ſemble devoir conſerver ſon parallélisme, que parce que les autres tranches qui l'entraînent, conſervent le leur.

A l'égard de la ſeconde ſuppoſition, il eſt évident qu'elle ne ſauroit être rigoureuſement exacte, puiſque chaque tranche, en conſervant ſon parallélisme, change de figure à chaque inſtant, & qu'ainſi les particules ne peuvent être ſuppoſées conſerver la même direction d'un inſtant à l'autre.

Néanmoins ſi les tranches conſervent leur parallélisme, ce qui eſt très-vraiſemblable, comme on vient de le voir, on ne peut guères imaginer que les deux manieres ſuivantes, dont les particules du Fluide puiſſent ſe mouvoir.

On peut ſuppoſer d'abord que toutes les particules d'une tranche quelconque qui peuvent deſcendre parallélement à *AB* ſans en être empêchées par les côtés du vaſe, deſcendent en effet de cette maniere, tandis que les autres qui ſont proches du vaſe deſcendent par des mouvemens fort obliques, pour venir ſe mettre dans l'eſpace qu'elles trouvent vuide. Or, comme le nombre de ces dernieres particules eſt infiniment petit par rapport aux autres, il eſt évident qu'on pourra toujours ſuppoſer, ſans erreur ſenſible, que la vîteſſe de tous les points d'une même tranche eſt parallèle à *AB*.

En ſecond lieu, on peut ſuppoſer (ce qui eſt beaucoup plus vraiſemblable) que les particules *N*, *T*, *M*, *V* &c. (Fig. 37.) décrivent des Courbes *NTR*, *MVS*,

qui diviſent les tranches CD, KZ &c. en même raiſon. Car en ſuppoſant, par exemple, $cd\delta x = CDdc$, on trouve que $nm\mu\nu = NMmn$: donc en imaginant les points N, M, mûs ſuivant les Courbes $Nn\nu$, $Mm\mu$, on voit aiſément de quelle maniere la tranche $CDdc$ peut parvenir en $cd\delta x$ en changeant de figure. Si cela eſt, la vîteſſe Nn ou nu (Fig. 38.) d'une particule N quelconque dans un inſtant, ſe changeant en $n\nu$ dans l'inſtant ſuivant, doit être regardée comme compoſée de cette vîteſſe $n\nu$, & d'une autre vîteſſe νu qui eſt anéantie. La vîteſſe νu qui doit être détruite, doit être regardée comme compoſée des vîteſſes νi & iu : or, comme la vîteſſe νi eſt évidemment la même pour toutes les particules d'une même tranche, il eſt clair, qu'abſtraction faite de la vîteſſe iu, les tranches doivent reſter en équilibre en vertu de la ſeule vîteſſe νi. On peut donc dans la ſolution des Problêmes précédens, ne faire attention qu'à la vîteſſe de chaque particule eſtimée parallélement à AB, & pour lors ces ſolutions ſeront exactes, en regardant ce que nous avons appellé ν, non comme la vîteſſe réelle des particules de chaque tranche, mais comme la vîteſſe de ces particules eſtimée ſuivant AB.

A l'égard de la vîteſſe iu qui n'eſt pas la même pour toutes les particules de la tranche cd; ſi on veut que les particules N du Fluide décrivent les Courbes $Nn\nu$, il faut néceſſairement ſuppoſer qu'il y a dans les parties du Fluide quelque force interne qui détruit cette vîteſſe, comme pourroit être, par exemple, la force qui cauſe

l'adhérence des particules entr'elles. Car il n'eſt pas douteux (*art.* 7 & 10.) que cette vîteſſe ſuivant *iu* ne détruisît l'équilibre, ſi elle n'étoit pas contrebalancée par quelque force.

En un mot, pour que les tranches conſervent leur paralléliſme, il paroît néceſſaire que la viteſſe de toutes, ou de preſque toutes les particules d'une même tranche, eſtimée ſuivant *AB*, ſoit la même pour toutes ces particules. Or cela ſuffit pour l'exactitude des ſolutions que nous avons données.

Si on ne veut pas convenir que les tranches conſervent leur paralléliſme, j'avoue qu'il ſeroit peut-être fort difficile de démontrer cette ſuppoſition en rigueur, quoique l'Expérience la rende très-plauſible. Mais auſſi il faut dans ce cas renoncer à toute Théorie ſur le mouvement des Fluides, juſqu'à ce que nous en connoiſſions la nature. Car il n'y auroit plus alors d'autre moyen pour déterminer ce mouvement, que d'examiner celui que chaque particule devroit avoir : or c'eſt à quoi nous croyons qu'il eſt très-difficile d'atteindre. Sur quoi, voyez le Tome premier de nos *Opuſcules Mathématiques*, quatriéme Mémoire.

Au reſte, il ne ſera peut-être pas inutile d'ajouter ici une conſidération nouvelle, qui ſervira à fortifier les raiſons qu'on vient d'apporter en faveur du paralléliſme des tranches.

Soit *CD* (Fig. 165.) la ſurface du Fluide dans l'inſtant qu'il commence à ſe mouvoir, en vertu de ſa pe-

ſanteur. Toutes les particules A, a, &c. de cette ſurface tendent à ſe mouvoir dans ce premier inſtant en vertu de leurs peſanteurs, avec des vîteſſes égales repréſentées par les lignes verticales parallèles, égales & infiniment petites AG, ag; mais comme les parois du vaſe empêchent que toutes les parties A, a, &c. de la ſurface, ne puiſſent ſe mouvoir verticalement, il faut regarder les vîteſſes AG, ag, des points A, a, comme compoſées de deux autres vîteſſes; ſavoir, des vîteſſes AE, ae, avec leſquelles ils ſe meuvent réellement, & des vîteſſes AF, af qui ſont détruites. Or décompoſant ces vîteſſes AF, af, chacune en deux autres Ao, oF, & am, mf, il eſt clair que puiſque la ſurface CD eſt plane, & que les directions AF, af ſont obliques à cette ſurface, il eſt néceſſaire, pour qu'il y ait équilibre, 1°. que les forces ſuivant oF, mf, ſoient detruites & anéanties par quelque force inhérente aux particules du Fluide. 2°. Que les forces ſuivant Ao, am, qui ſont alors les ſeules à conſidérer pour la conſervation de l'équilibre, ſoient égales entr'elles (*art.* 36.); d'où il s'enſuit que les lignes oG, mg, ou leurs égales Ai, an ſeront égales; & qu'ainſi la vîteſſe de tous les points A, a, &c. de la ſurface, ſera la même dans le ſens vertical.

Il eſt donc démontré que la ſurface CD doit, au premier inſtant, demeurer horizontale. On prouvera par un raiſonnement ſemblable, qu'elle doit demeurer horizontale dans les inſtans ſuivans. Car le raiſonnement précédent auroit encore lieu, ſi on ſuppoſoit que les particu-

les *A*, *a* cuſſent déja des vîteſſes, qui, eſtimées dans le ſens vertical, fuſſent égales entr'elles, & qui duſſent être altérées l'inſtant ſuivant par l'effort de leur peſanteur ſuivant *AG*, *ag*; ainſi dès que les particules de la ſurface *CD* ont eu dans un même inſtant des vîteſſes égales dans le ſens vertical, leurs vîteſſes dans ce même ſens doivent être égales dans tous les inſtans ſuivans. Donc &c.

Or de ce que la ſurface *CD* conſerve continuellement la ſituation horizontale, on eſt en droit de conclure que les autres tranches horizontales du Fluide conſervent auſſi leur paralléliſme. Car d'abord il ne paroît guères poſſible que le Fluide formât une maſſe continue, ſi la premiere tranche conſervoit la ſituation horizontale, ſans qu'il en fût de même de toutes les tranches; de plus, la force inhérente aux particules du Fluide, & qui anéantit, comme nous avons vû, les forces ſuivant *oF*, *mf*, &c. doit agir de même dans l'intérieur du Fluide; de ſorte que dans l'eſtimation des vîteſſes détruites à chaque inſtant dans les différentes particules, il ne faudra avoir égard qu'à la partie de ces vîteſſes eſtimée dans le ſens vertical. Or cela poſé, il eſt certain (*article 36.*) que cette partie devroit être la même dans tous les points d'une même tranche. Donc la vîteſſe de tous ces points doit être la même dans le ſens vertical.

S'il y a des cas où la ſurface du Fluide ne demeure pas horizontale (ce qui n'arrive même que quand cette ſurface eſt fort proche de l'ouverture par laquelle l'eau s'écoule) cette irrégularité ne paroît guères devoir être at-

tribuée à une autre cauſe qu'à l'adhérence du Fluide aux parois du vaſe, adhérence dont nous faiſons abſtraction ici.

Comme nous n'avons conſidéré dans chaque tranche que la vîteſſe dans le ſens vertical, il eſt conſtant que la conſervation des forces vives, telle que nous l'avons démontrée, n'a lieu qu'improprement dans les Fluides, au moins de la maniere dont nous enviſageons ici leur mouvement. Car en enviſageant ce mouvement d'une maniere plus rigoureuſe & plus générale, mais auſſi moins ſuſceptible d'être ſoumiſe au calcul, nous avons fait voir dans nos *Opuſcules Mathématiques*, Tome 1, pag. 156 & ſuivantes, que la conſervation des forces vives a toujours lieu dans le mouvement des Fluides.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe par une ouverture faite au fond.

111. Dans la ſolution du Problême précédent, nous avons ſuppoſé que le fond PL dans un vaſe étoit entiérement ouvert; la Méthode que nous avons ſuivie pour trouver dans ce cas la vîteſſe du Fluide qui en ſort, peut auſſi ſervir à déterminer la vîteſſe d'un Fluide, ſortant d'un vaſe par une ouverture PL (Fig. 39.) faite au fond KS de ce vaſe; il y a cependant quelques précautions à prendre dans l'application de cette Méthode.

On a ſuppoſé dans le Problême IV, que la vîteſſe de chaque tranche étoit en raiſon inverſe de ſa largeur. Mais comment peut-on ſuppoſer ici que la vîteſſe de ks infiniment

finiment proche de PL, ſoit à celle de PL, comme PL à ks, & que la viteſſe de la tranche $ksSK$ ſe change en un inſtant en une autre vîteſſe qui différe de la premiere d'une quantité finie? On ne peut ſauver cette eſpéce d'abſurdité, qu'en imaginant que les particules du Fluide qui ſont proches du fond, s'approchent de ce fond par des mouvemens fort obliques ſuivant les lignes Courbes kOP, sQL, tandis que les parties du Fluide contenues dans les eſpaces kKP, sSL ſont regardées comme ſtagnantes. L'Expérience eſt là-deſſus d'accord avec la Théorie *, & nous fait voir de plus que ces Courbes kOP, sQL, ſoit qu'elles varient ou non à chaque inſtant, ſont toujours fort petites, & fort peu élevées au-deſſus du fond.

112. De-là il s'enſuit qu'on peut ſubſtituer au vaſe donné, le vaſe fictif $CkOPLQSD$ dans lequel on ſuppoſera que le Fluide ſe meuve; & alors, non-ſeulement la Méthode du Problême précédent peut s'appliquer ici, mais il n'y a même aucun changement à faire à la ſolution, & on peut entiérement faire abſtraction des Courbes kOP, sQL. Car comme ces Courbes kOP, sQL ſont très-petites l'une & l'autre; il s'enſuit, ſoit que ces Courbes varient, ou non, que la quantité que nous avons appellée N (*art.* 88 & 105.) différe très-peu de ce qu'elle ſeroit, ſi on n'avoit aucun égard à ces Courbes, au moins lorſque l'ouverture PL n'eſt pas très-petite par rapport à KS. Quant aux cas où l'ouverture PL eſt

* Voyez l'Hydrodyn. de M. *Daniel Bernoulli*, Sect. 4, §. 3.

infiniment petite, nous avons vû ci-deſſus (*art.* 108.) que la vîteſſe du Fluide ſortant par PS étoit égale à $V[2p.AB]$, quelle que fût la figure du vaſe.

Il eſt aiſé de voir que ſi le vaſe eſt Cylindrique, on aura dans l'*art.* 109, λ ou $\int \frac{dx}{y} =$ à très-peu près $\int \frac{dx}{k} = \frac{a}{k}$; donc alors $a = \lambda k$. Donc ſi le vaſe eſt Cylindrique, & n'a qu'une très-petite ouverture, la ſurface CD tombe dans les premiers inſtans avec la même vîteſſe que ſi elle tomboit de la hauteur très-petite q, c'eſt-à-dire, avec la même vîteſſe que ſi elle tomboit librement par l'effort de ſa peſanteur. C'eſt ce que M. *Daniel Bernoulli* avoit déja remarqué, pour le ſeul cas d'un vaſe Cylindrique.

Un habile Géométre prétend que cela eſt impoſſible, parce qu'il s'enſuivroit de-là, que le Fluide deſcendroit dans le commencement du mouvement, avec la même vîteſſe que ſi le fond ne lui faiſoit aucun obſtacle. A cela on peut répondre, que l'objection eſt très-fondée, ſi on ſuppoſe avec M. *Daniel Bernoulli*, que toute la partie du Fluide renfermée dans le vaſe Cylindrique $CDSK$, (Fig. 40.) a la même vîteſſe que la tranche CD; ſuppoſition qui eſt en effet choquante, puiſque les parties contigues au fond du vaſe $KPLS$, ne ſauroient même ſe mouvoir du tout, bien loin d'avoir une vîteſſe égale à celle de la ſurface CD. Mais l'objection perd ſa force, ſi on ſuppoſe, comme nous avons fait, *art.* 111, que les parties

du Fluide qui ſont proches du fond, s'approchent de l'ouverture par des mouvemens très-obliques ; enſorte que le vaſe ſoit cenſé ſe retrécir depuis la ſurface ks juſqu'à l'ouverture PL dont on ſuppoſe que ks eſt très-proche, & qu'il y ait au-deſſus des fonds KP, LS une petite partie du Fluide qui ſoit ou qui puiſſe être regardée comme ſtagnante. Alors la vîteſſe de la partie $KPLS$ étant beaucoup plus grande que celle des parties ſupérieures, & n'étant point arrêtée par la réſiſtance des fonds KP, LS (au-deſſus deſquels il y a une petite partie de Fluide qui eſt comme en repos), rien n'empêche, ce me ſemble, que la ſurface CD ne puiſſe deſcendre dans les premiers inſtans, comme ſi elle tomboit librement.

Il faut cependant remarquer, que l'ouverture PL pourroit être ſi petite, que $\int \frac{dx}{y}$ ne pourroit plus être ſuppoſée $= \int \frac{dx}{a}$, ſur-tout ſi la ſurface ks n'étoit pas ſuppoſée en même-temps extrêmement proche de l'ouverture PL. Mais cette diſcuſſion qui nous meneroit trop loin, quant à préſent, ſera traitée dans un autre lieu, où nous examinerons les conſéquences qui en réſultent. Il nous ſuffit ici d'obſerver, que l'identité de mouvement de la ſurface CD au premier inſtant, avec celui des Corps peſans qui tombent en liberté, dépend uniquement de la ſuppoſition que $\int \frac{dx}{y}$ ſoit ſenſible-

ment égal à $\frac{a}{k}$, ſuppoſition que l'Expérience ſeule peut contredire ou confirmer.

113. Il eſt ſi eſſentiel de ſuppoſer que les particules du Fluide s'approchent de PL par des Courbes kOP, sQL (Fig. 39.) que ſans cela on devroit trouver pour la vîteſſe de l'eau qui ſort par PL, une expreſſion très-différente de celle qu'on trouveroit par la Théorie précédente. Pour le faire voir dans un cas très-ſimple, ſoit un vaſe Cylindrique $CDSK$ (Fig. 40.) percé d'un trou PL, on auroit en général par la Théorie précédente $-2KKqudu - uu(k^2dq - K^2dq) = -2KKpqdq$; & cette Equation donne, comme dans l'*art.* 108, $r = q$.

Suppoſons préſentement, que la vîteſſe u de la tranche $ksSK$ ſe change ſubitement d'un inſtant à l'autre dans la vîteſſe V que doit avoir le Fluide qui ſort par PL, tandis que la vîteſſe du Fluide contenu depuis CD juſqu'en ks augmente de la quantité du. Il eſt clair qu'il faudra regarder la vîteſſe u de la tranche $KSsk$, au moment qu'elle ſe change en V, comme compoſée de la vîteſſe V & de la vîteſſe $u - V$, & que les particules qui ſont dans l'eſpace $ksSK$, animées de la vîteſſe $V - u$ ſuivant BA, devroient faire équilibre au reſte du Fluide animé de la vîteſſe $pdt - du$. On aura donc $BQ.(V - u) = AB.(pdt - du)$, ou en mettant q pour AB, $-dq$ pour BQ, pour V ſa valeur $\frac{uk}{K}$, & pour dt, $\frac{-dq}{u}$;

$$-Kpqdq - Kqudu = u^2dq(K - k);$$

Equation qui différe de la précédente.

Or, ſans parler de la difficulté qu'il y a à imaginer comment la vîteſſe u peut ſe changer ſubitement en V, ſans que le plus grand nombre des parties de la tranche $ksSK$ ait des mouvemens fort obliques, une preuve ſenſible que cette derniere Equation ne fourniroit qu'une détermination fautive du mouvement du Fluide, c'eſt qu'en y ſuppoſant l'ouverture K fort petite, on ne pourroit pas en déduire que la vîteſſe du Fluide qui ſort, fût égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant librement de la hauteur DS, quoique ce fait ſoit conſtaté par l'Expérience. En effet, puiſque l'Equation $2KKqudu - uu(k^2dq - K^2dq) = -2KKpqdq$, donne, en mettant pour u ſa valeur $\frac{VK}{k}$, $\frac{2K^4qVdV}{k^2} - V^2K^2dq - \frac{V^2K^4dq}{k^2} = -2KKpqdq$; & quand K eſt fort petit, $V^2 = 2pq$; l'Equation $-Kpqdq = Kqudu - \frac{u^2(k-K)dq}{\varrho}$ ϱ étant une conſtante quelconque, donnera de même $-\varrho Kpqdq = \frac{\varrho pK^3VdV}{k^2} - \frac{V^2K^2dq}{k} + \frac{V^2K^3dq}{k^2}$; donc $V^2 = \frac{\varrho pq.k}{K}$, quand K eſt fort petit: donc ſi $\rho = 1$, on aura $V = \frac{pqk}{K}$, par conſéquent V eſt dûe à la hauteur $\frac{kq}{2K}$, c'eſt-à-dire, eſt comme infinie.

On m'a objecté contre l'Equation $BQ(V-u) = AB(pdt - du)$, que ſi on ſuppoſoit la tranche $ksSK$ entiérement ſortie, alors il faudroit faire $AB(pdt - du)$

$= \frac{\overline{V-u} \times BQ \times k}{K}$, $\frac{BQ\,k}{K}$ étant en effet alors la hauteur de la tranche ; or cette Equation, comme on le remarque avec raiſon, ne donne pas le même réſultat que l'Equation $AB(p\,dt - du) = BQ(V-u)$, & cependant le réſultat devroit être le même dans les deux cas. Ma réponſe eſt, qu'on ne doit conſidérer l'équilibre entre la tranche $k\,s\,S\,K$ & le reſte du Fluide, que quand cette tranche n'eſt encore ſortie du vaſe, ni en tout, ni en partie. Car quand elle eſt ſortie du vaſe en tout ou en partie, on ne peut plus ſuppoſer que la partie qui eſt déja ſortie du vaſe ſoit en équilibre ; parce que les parties inférieures preſſant les ſupérieures de bas en haut avec la vîteſſe $V - u$, & leur preſſion n'étant point ſoutenue par les parois du vaſe, il faudroit néceſſairement que le Fluide en vertu de cette preſſion, s'écartât & s'étendît latéralement à droite & à gauche. Il eſt donc abſolument néceſſaire de conſidérer la tranche $k\,s\,S\,K$ au moment de l'équilibre, comme étant encore toute entiere dans le vaſe. C'eſt une nouvelle raiſon pour ne pas conſidérer l'équilibre dans l'inſtant où la tranche $k\,s\,S\,K$ eſt déja à moitié ſortie, comme le ſuppoſe l'habile Géométre dont je viens de parler.

L'Equation $BQ(V-u) = AB(p\,dt - du)$ eſt donc réellement celle qui convient à la ſuppoſition que la vîteſſe de la tranche $k\,s\,S\,K$ paſſe bruſquement de la valeur u à la valeur V & par conſéquent le peu d'accord du réſultat de cette Equation avec l'Expérien-

ce, prouve la fauſſeté de la ſuppoſition.

Si on faiſoit $\frac{k.BQ}{2K}(V-u) = AB(pdt - du)$, on trouveroit $V^2 = 2pq$; ce qui s'accorderoit avec l'Expérience. On pourroit faire encore beaucoup d'autres hypothèſes qui donneroient ce même réſultat; mais pour peu qu'on y prenne garde, on verra que dans toutes ces hypothèſes on ſuppoſe tacitement, 1°. que la tranche $ksSK$ du Fluide eſt déja ſortie en tout ou en partie; 2°. que de la vîteſſe u, cette tranche a paſſé à la vîteſſe V *par dégrés*, & non pas bruſquement, comme nous l'imaginons ici. Ceci ſuffit pour répondre à une objection qui m'a été faite par un habile Géométre. Je ne nie point qu'on ne puiſſe imaginer des hypothèſes & des Equations qui donnent $VV = 2pq$, & par conſéquent le vrai mouvement du Fluide; mais je nie que ces Equations puiſſent avoir lieu, ſi la ſurface BQ paſſe *bruſquement* & ſans gradation de la vîteſſe u à la vîteſſe V. On dira qu'elle n'y paſſe pas; j'en conviens, & c'eſt auſſi ce que j'ai voulu prouver, en faiſant voir que ſi cela étoit, on n'auroit pas $VV = 2pq$. Je ſçais qu'on peut ſuppoſer que la ſurface ks paſſe très-promptement & comme dans un inſtant de la vîteſſe u à la vîteſſe V; c'eſt en effet ce qui arrivera, ſi les Courbes kOP, sQL (Fig. 39.) ſont très-petites, & très-peu éloignées du fond; mais il ſuffit qu'on ſuppoſe que la vîteſſe u ne paſſe pas *bruſquement* à la vîteſſe V, pour que l'Equation $BQ(V-u) = AB(pdt - du)$ n'ait

plus lieu. Or, comme en effet l'Expérience prouve que cette Equation n'a pas lieu, il eſt clair que la vîteſſe u ne paſſe pas *bruſquement* & ſans aucune gradation à la vîteſſe V. On peut encore conſidérer, pour prouver cette vérité d'une autre maniere, que ce bruſque changement ne peut s'opérer, à moins que la tranche $kKSs$ (Fig. 40.) ne ſe contracte tout-à-coup, juſqu'à n'avoir plus que la largeur PL; ce qui ne ſe peut faire pour deux raiſons; la premiere, c'eſt qu'alors toute la partie du Fluide qui eſt au-deſſus de KP & de LS ne ſeroit plus appuyée ſur le fond, ni ſur le Fluide inférieur, & par conſéquent ne pourroit plus être ſuppoſée en équilibre; la ſeconde, c'eſt qu'afin que la tranche $kKSs$ ſe contracte en largeur, il faut qu'elle s'allonge en hauteur; donc il eſt néceſſaire qu'une partie de la tranche $kKSs$ ſorte par l'ouverture PL, & par conſéquent ait acquis la vîteſſe V, avant que le reſte de la tranche ait acquis cette vîteſſe; ce qui eſt contraire à l'hypothèſe que la tranche entiere paſſe *bruſquement* de la vîteſſe u à la vîteſſe V.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe par une ouverture verticale faite aux parois du vaſe.

114. Lorſqu'un Fluide ſort d'un vaſe ſitué verticalement, par une ouverture qui n'eſt pas horizontale, il eſt évident que la ſurface ſupérieure du Fluide n'étant pas alors parallèle à l'ouverture, on ne ſauroit ſuppoſer que les tranches conſervent leur paralléliſme : il y a lieu de croire

croire cependant, que ſi le trou eſt fort petit, le Fluide ne commence à ſe détourner de la verticale, que quand il eſt fort près du trou; alors la vîteſſe du Fluide doit être à peu près la même, que ſi l'ouverture étoit horizontale. Si l'ouverture n'eſt pas très-petite, en ce cas, je conçois que les mouvemens des particules doivent être fort irréguliers, & le Problême me paroît du genre de ceux où il n'y a pas aſſez de données. Il me ſemble néanmoins, que ſi l'ouverture n'eſt pas fort conſidérable, on peut ſuppoſer que la vîteſſe d'une particule quelconque qui paſſe par cette ouverture, eſt égale à la vîteſſe que cette particule auroit acquiſe, en tombant librement par ſa propre peſanteur, d'une hauteur égale à la diſtance qu'il y a de cette particule à la ſurface ſupérieure du Fluide. D'où l'on voit que la vîteſſe de toutes les particules qui ſortent à-la-fois par l'ouverture du vaſe, n'eſt pas la même, comme quand l'ouverture eſt horizontale, mais que cette vîteſſe eſt d'autant plus grande, que les particules ſont plus éloignées de la ſurface ſupérieure du Fluide. Voyez au reſte ſur le mouvement des Fluides, par ces ſortes d'ouvertures, nos *Opuſcules Mathématiques*, Tom. 1, pag. 159 & 160.

Du mouvement d'un Fluide dans un Tuyau incliné.

115. La plûpart des Auteurs qui ont traité du mouvement des Fluides dans des vaſes, ſuppoſent que dans un Tuyau cylindrique incliné dont la partie *ABDC* (Fig. 41.) eſt remplie de Fluide, les mouvemens des particules

du Fluide ſont parallèles aux côtés du Tuyau. Cette ſuppoſition, qui ſemble d'abord fort naturelle, renferme cependant beaucoup de difficultés. Car ſoient a, α deux particules quelconques de deux tranches AB, CD, leſquelles tendent naturellement à ſe mouvoir ſuivant ab, $\alpha\zeta$ par l'effort de leur peſanteur; & ſuppoſons que ces particules a, α, doivent ſe mouvoir dans le Tuyau ſuivant les lignes ac, αx parallèles aux côtés du Tuyau; il faut, par notre Principe général, regarder les efforts ab, $\alpha\zeta$ comme compoſés des vîteſſes ac, αx, & des efforts ad, $\alpha\delta$, qui doivent être détruits. Or il eſt impoſſible que ces efforts ſoient détruits, 1°. parce qu'ils ſont égaux, & dirigés dans le même ſens pour toutes les particules du Fluide; 2°. parce qu'ils ne ſont pas perpendiculaires aux tranches AB, CD, quoique cela ſoit néceſſaire pour l'équilibre.

Il n'y a pas moins d'inconvénient à ſuppoſer que le Fluide coule de maniere, que la ſurface AB ſoit perpendiculaire aux côtés du Cylindre. Car, outre qu'il faudroit montrer, comment la ſurface AB, d'horizontale qu'elle étoit au commencement du mouvement, deviendroit dans la ſuite inclinée, les deux difficultés que nous venons de faire pour le cas où AB demeureroit horizontale, auroient encore lieu ici.

D'un autre côté, il eſt évident que la figure & la poſition du vaſe ne permet pas de ſuppoſer que toutes les parties du Fluide deſcendent verticalement; auſſi ce qui paroît devoir arriver, c'eſt que les particules que les côtés

du vaſe n'empêchent point de deſcendre verticalement, deſcendront en effet de cette maniere : à l'égard des particules que les côtés du vaſe empêchent de deſcendre verticalement, ou bien elles viendront par des mouvemens fort obliques remplir l'eſpace que laiſſent à remplir les parties qui deſcendent verticalement, & en ce cas le mouvement du Fluide ſera le même à peu près que dans un vaſe Cylindrique vertical de même baſe & de même hauteur que le propoſé ; ou bien les particules contigues au vaſe deſcendront beaucoup moins vîte que les autres, & en ce cas la ſurface *AB* du Fluide ne ſera point plane pendant le temps qu'il s'écoulera, les tranches ne conſerveront plus leur paralléliſme, & le Problême renfermera des difficultés inſolubles.

Remarque I.

116. Si on ſuppoſe de l'adhérence dans les particules du Fluide, en ce cas, on peut imaginer aiſément que les particules ſe meuvent parallélement aux parois du vaſe, pourvû que les ſurfaces *AB*, *CD*, (Fig. 42.) ſoient perpendiculaires à ces mêmes parois. Voici comment ; on décompoſera pour chaque particule la force de la peſanteur ſuivant *ab* en une force ſuivant *ac* parallèle à *BD*, & une force ſuivant *ad* qui ſoit dans la direction de *AB*, & par conſéquent perpendiculaire à *BD*. Or je dis qu'en ayant égard à l'adhérence des parties, on peut ſuppoſer que les particules du Fluide animées de la force accélératrice *ad* ſont en équilibre. Car les particules *a*,

qui ſont ſituées dans la même ligne $a\alpha$ parallèle à AC; tendent en vertu des forces ad, $a\delta$ à s'échapper en ſens contraires, avec des vîteſſes égales : donc elles reſteront en repos, ſi l'adhérence des parties du Fluide eſt aſſez grande pour les retenir.

Je ne ſai ſi c'eſt par cette raiſon que M. *Daniel Bernoulli* a ſuppoſé dans ſon Hydrodynamique, que la ſurface d'un Fluide qui ſe meut dans un Tuyau incliné, eſt perpendiculaire aux parois du Tuyau.

Remarque II.

117. S'il étoit poſſible que le Fluide ſe mût de maniere que ſes particules décriviſſent des lignes parallèles aux côtés du vaſe, ſans que les ſurfaces AB, CD fuſſent perpendiculaires à ces mêmes parois, en ce cas il faudroit toujours néceſſairement ſuppoſer que la force ad fût dans la direction de AB; autrement il ſeroit impoſſible qu'il y eût jamais équilibre, même en admettant l'adhérence des parties, parce que la force ad pourroit toujours ſe décompoſer en deux forces, dont l'une tendroit à mouvoir toutes les particules ſuivant ac, & ne pourroit manquer de produire un effet.

De plus, ſi la force ad eſt dans la direction de AB, il faut ſuppoſer, comme on l'a déja fait dans l'*article* 110, qu'il y a une force interne qui en détruit l'effet.

En ce cas, la force des particules ſuivant $a\alpha$ ſeroit plus grande que leur peſanteur, puiſque ac ſeroit alors plus grande que ad. On remarquera, de plus, que la con-

ſervation des forces vives n'auroit point lieu pour lors, puiſque les parties du Fluide parcourroient dans un temps donné un plus grand eſpace que ſi elles étoient libres, & ſeroient animées par une force plus grande. La conſervation des forces vives auroit lieu néanmoins, ſi on n'avoit égard qu'à la vîteſſe du Fluide eſtimée ſuivant la direction verticale, & non pas à la vîteſſe réelle du Fluide ſuivant la longueur du Tube. Mais, comme nous avons remarqué ci-deſſus (*art.* 110.) que la conſervation réelle des forces vives a toujours lieu dans le mouvement d'un Fluide à travers des Tuyaux quelconques, il s'enſuit que le mouvement d'un Fluide dans un Tuyau incliné, n'eſt pas tel que nous le ſuppoſons dans le préſent article.

De la quantité de Fluide qui s'échappe d'un vaſe dans un temps donné.

118. La vîteſſe d'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe par une ouverture donnée, ayant été trouvée par la ſolution des Problêmes précédens, il ſemble d'abord que c'eſt une queſtion de pure Géométrie, & qui n'a aucune difficulté, que de trouver la quantité de Fluide qui s'écoule dans un temps donné : cela ſeroit en effet fort facile, ſi les particules du Fluide ſortoient du vaſe ſuivant des directions parallèles. Mais M. *Newton* a obſervé que ces particules ont des directions convergentes, & que la veine de Fluide qui ſort, va en diminuant de groſſeur juſqu'à une certaine diſtance de l'ouverture, diſtance qui

eſt d'autant plus grande, que l'ouverture elle-même eſt plus grande. De-là il s'enſuit que pour trouver la quantité de Fluide qui ſort à chaque inſtant, il ne faut plus prendre le produit de la grandeur de l'ouverture par la vîteſſe du Fluide, mais le produit de la vîteſſe du Fluide dans l'endroit où la veine d'eau eſt le plus contractée, par la largeur de cette même veine dans cet endroit. Voyez l'Hydrodynamique de M. *Daniel Bernoulli*, ſect. 4, où cette matiere eſt traitée fort au long, & à laquelle je me contente de renvoyer, ne croyant pas qu'on puiſſe ajouter rien à ce qu'il a dit là-deſſus.

Remarque.

119. Cette contraction de la veine avoit induit M. *Newton* en erreur dans la premiere édition de ſes Principes. Car comme il meſuroit la vîteſſe de l'eau au ſortir du vaſe par la quantité d'eau qui ſortoit, ſans faire attention à la contraction de la veine, il en avoit conclu que la vîteſſe du Fluide étoit égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant, non de la hauteur entiere, mais de la moitié de la hauteur de la ſurface au-deſſus de l'ouverture. Faiſant enſuite attention à la contraction de la veine, il reconnut que ſon cercle le plus petit étoit à l'ouverture circulaire du vaſe à peu près comme 1 à $\sqrt{2}$, & qu'ainſi la quantité de Fluide qui s'écouloit dans un temps donné, devoit être moindre en ce même rapport, que celle qui ſe ſeroit écoulée, ſi la veine n'avoit eu aucune contraction.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe qu'on entretient toujours plein à la même hauteur.

PROBLÊME V.

120. *Déterminer la vîteſſe d'un Fluide qui ſort d'un vaſe qu'on entretient toujours plein à la même hauteur.*

Soit CD (Fig. 32.) la ſurface du Fluide, PL l'ouverture du vaſe; & ſoit ſuppoſée la ſurface CD parvenue en cd; il eſt clair, que puiſque le vaſe eſt entretenu toujours plein (*hyp.*) il faut imaginer que tandis que la ſurface CD parvient en cd, une nouvelle Couche $CDdc$, eſt créée, pour ainſi dire, dans l'eſpace $CDdc$, & reçoit une vîteſſe égale à celle de la Couche CD. D'où l'on voit que cette nouvelle Couche n'agit en aucune maniere ſur la ſurface CD, & qu'ainſi l'augmentation ou la diminution de vîteſſe du Fluide pendant cet inſtant, eſt la même que ſi le vaſe n'étoit pas entretenu plein à la même hauteur durant cet inſtant.

Donc ſi on ſuppoſe que $PL \times x$ exprime la quantité de Fluide qui eſt ſorti du vaſe pendant un temps quelconque depuis le commencement du mouvement, on aura

$$Nudu + \frac{uu}{2}(NnUV - FTtf) = CDdc.p.AB,$$

c'eſt-à-dire, en faiſant $AB = a$, $GH = PL$ (& par conſéquent $m = K$) & $uu = 2ps$

$$kkNds + s(Kkkdx - K^3dx) = kkKadx.$$

REMARQUE I.

121. M. *Daniel Bernoulli* distingue deux différentes manieres d'entretenir le vase toujours plein. La premiere est celle dont nous venons de faire mention, & consiste à imaginer qu'on crée continuellement une nouvelle surface, qui ait la vîtesse de celle qui la suit immédiatement.

La seconde est d'imaginer que la nouvelle surface $CDdc$ soit ajoutée par infusion latérale, & qu'elle reçoive sa vîtesse de celle qui la suit immédiatement : mais comment la surface CD étant animée d'une vîtesse finie, peut-elle traîner après elle une couche de Fluide supérieure qui n'a aucune vîtesse, & lui communiquer du mouvement ? La seule ténacité des parties du Fluide peut produire cet effet : ainsi nous remettons à en parler plus au long dans la remarque suivante.

REMARQUE II.

122. Soit CD (Figure 43.) la surface du Fluide, & concevons qu'au-dessus de cette surface, on ajoute la petite Couche $CD\varpi x = CDdc$, qui n'ait aucun mouvement, & qui soit entraînée en $CDdc$ par l'action du Fluide inférieur ; en réitérant ainsi à chaque instant cette petite masse $CD\varpi x$, qui est non-seulement infiniment petite, mais qu'on peut supposer même infiniment petite de tel ordre qu'on voudra, puisque l'ordre d'infiniment petit de son égale $CDdc$ est arbitraire, on aura une idée de la seconde maniere d'infusion, dont nous avons

avons parlé dans la Remarque précédente d'après M. *Bernoulli*, & par le moyen de laquelle on conserve toujours le vase plein à la même hauteur.

Pour déterminer dans ce cas la vîtesse du Fluide, nous supposerons que V soit la vîtesse de la surface CD; il est évident que la tranche $CD\int x$, qui, dans l'instant qu'on la suppose ajoutée à CD, n'a aucune vîtesse, auroit dans l'instant suivant la vîtesse pdt, si elle pouvoit se mouvoir librement; & qu'entraînée par la tranche $CDdc$, elle aura dans ce même instant la vîtesse V ou une vîtesse $V+\alpha$ qui en différera infiniment peu; donc il faut regarder la vîtesse pdt de cette tranche, comme composée de la vîtesse $V+\alpha$ & de la vîtesse $pdt-V-\alpha$, qui doit être détruite: c'est pourquoi il faudra que la tranche $CD\int x$ animée de la vîtesse $pdt-V-\alpha$ fasse équilibre à toutes les autres tranches animées de la vîtesse $pdt-dv$. On aura donc.

$$CD.Aa.(pdt-V-\alpha)+CD\int dx(pdt-dv)=0;$$

& effaçant dans le premier membre les quantités pdt, & α, nulles par rapport à V, mettant pour Aa, sa valeur Aa, pour $\int dx\,dv$ sa valeur trouvée *art.* 96, pour dt sa valeur $\frac{Aa.CD}{u.GH}$, & pour V, $\frac{u.GH}{CD}$; on aura

$$\frac{Aa.u.GH}{CD}=\frac{p.AB.Aa.CD-Nudu}{u.GH}-Aa.CD.u.GH\times\left(\frac{CD^2-PL^2}{2CD^2.PL^2}\right).$$

Si l'on suppose, pour abréger les expressions, que la

ligne constante GH soit l'ouverture même $PL = K$, & que u soit par conséquent la vîtesse de PL, on aura suivant les noms de l'*art.* 120. $Aa = \frac{Kdx}{k}$; l'Equation précédente deviendra en transposant, & supposant $uu = 2pr$, $Kkkadx = kkNdr + 2r.K^3dx - rK^3dx + rKkkdx$; ou $kkKadx = kkNdr + rK^3dx + Kkkrdx$.

REMARQUE III.

123. L'Equation que donne M. *Daniel Bernoulli*, pag. 94 de son Hydrodynamique, pour le cas dont nous venons de faire mention dans l'article précédent, revient à celle-ci $Kadx = Ndr + Krdx$. Or cette Equation ne s'accorde avec la nôtre, que dans le cas où K est fort petit, parce qu'alors le terme $rK^3\,dx$ est nul par rapport aux autres.

D'où peut donc provenir la différence qui se trouve ici entre nos deux solutions, puisque jusqu'à présent nous avons toujours été d'accord dans les précédentes? voici, ce me semble, quelle en est la raison. M. *Daniel Bernoulli* est parvenu à son Equation, en se servant du Principe de la conservation des forces vives. Si nous avions employé ce Principe dans le cas dont il s'agit ici, nous aurions trouvé
$PL^2.CD(CD\int x.VV + 2Nudu) + Aa.uu.GH^2 \times (CD^2 - PL^2) = 2PL^2.CD.CD\int x.p.AB$; ce qui, en faisant comme ci-dessus $GH = K$, nous auroit donné l'Equation même $Kadx = Ndr + Krdx$, que M. *Da-*

niel Bernoulli a trouvée par une voie différente. Mais nous avons déja fait voir dans notre Dynamique, qu'on ne doit pas employer le Principe de la conſervation des forces vives, quand le changement que reçoit la vîteſſe de chaque Corps, n'eſt pas infiniment petit. Or dans le cas dont il s'agit, la petite maſſe $CD\varpi x$ eſt ſuppoſée paſſer tout d'un coup de zero de vîteſſe à une vîteſſe finie V. Le principe de la conſervation des forces vives ne paroît donc point devoir être employé ici.

REMARQUE IV.

124. On dira peut-être, que dans notre ſolution nous n'avons pas dû ſuppoſer que la maſſe $CD\varpi x$ animée de la vîteſſe $-V$ dont la direction eſt de A vers α, fît équilibre aux autres tranches du Fluide animées chacune de la vîteſſe $pdt - dv$ qui lui convient. Cette objection ſeroit ſans replique, ſi les parties du Fluide n'étoient pas adhérentes entr'elles, & pour lors il ſeroit impoſſible que le Fluide $CDLP$ pût entraîner avec lui la maſſe $CD\varpi x$. Mais ſi on a égard à l'adhérence des parties, alors la ſolution eſt exacte. Car pour que le Fluide faſſe en coulant une maſſe continue, il faut que $A\alpha x - V + \int dx(pdt - dv)$ ſoit $= 0$, comme il eſt aiſé de le conclure de ce qui a été démontré dans l'*article* 52 : il faut, de plus, qu'en appellant A l'aire qui exprimeroit la force d'adhérence des parties du Fluide, comme dans l'*article* 45, la quantité $A\alpha x - V + \int dx(pdt - dv)$ n'ait aucune valeur négative $> A$. Si le contraire arrivoit, en ce cas le Flui-

de ſe ſépareroit infailliblement; mais la tranche $CD\delta x$ ſuivroit toujours néceſſairement une partie du Fluide inférieur, & ne formeroit jamais une maſſe iſolée, parce qu'on peut ſuppoſer Aa ou Aa ſi petit, que $Aa.CD.V$ ſoit $< A$.

REMARQUE V.

125. Si la tranche $CD\delta x$ étoit ſuppoſée avoir une viteſſe donnée B dans l'inſtant qu'on l'applique ſur CD, en ce cas il faudroit faire $Aa(B-V)+\int dx(pdt-dv)=0$, ce qui donneroit l'Equation
$2Kkkpadx+2B.KKkdxV[2pr]=2Np.kkdr+2prK^3dx+2prKkkdx$.

De l'oſcillation d'un Fluide dans un Syphon.

PROBLÊME VI.

126. *Trouver le mouvement d'un Fluide* CDKSPL; (Fig. 44.) *peſant & homogene qui balance dans un Syphon de figure quelconque.*

Il eſt viſible que ce Problême n'eſt qu'un cas particulier de celui que nous avons réſolu, en cherchant les Loix du mouvement d'un Fluide dans un vaſe indéfini: il y a ſeulement cette différence que le Fluide doit monter dans une des branches $PQSL$, & deſcendre dans l'autre; de ſorte que ſi on nomme x les différentes parties AO de la ligne AZ, z les différentes parties BV de la ligne BE, on aura $pdt=dv$ ou $\frac{pdx}{v}=dv$ pour

la vîteſſe perdue par chaque tranche de la portion $CDQK$, & $pdt + dv$ ou $\frac{pdz}{v} + dv$ pour la vîteſſe perdue par chaque tranche de la portion $PLSQ$. Il faudra donc que $\int dx\,(pdt - dv) = \int dz\,(pdt + dv)$ ou que $pdt(AZ - BE) = \int dx\,dv + \int dz\,dv$: en opérant ſur cette Equation, comme on a fait ſur les Equations ſemblables qu'on a trouvées dans les Problêmes précédens, on trouvera aiſément la vîteſſe du Fluide pour chaque inſtant ; & de plus, il eſt aiſé de voir que la ſomme des forces vives du Canal $CDQK$, plus la ſomme des forces vives du Canal $PLSQ$ eſt égale à chaque inſtant au produit de la maſſe totale du Fluide multipliée par le double de la quantité, dont le centre de gravité de cette maſſe eſt deſcendu depuis le commencement du mouvement.

REMARQUE I.

127. Nous n'avons conſidéré dans la ſolution précédente, que le mouvement du Fluide renfermé dans la partie $CDKQ$ & du Fluide renfermé dans la partie $PLSQ$, & nous avons ſuppoſé que les tranches de chacune de ces portions de Fluide conſervoient leur parallélîſme. Mais il faut auſſi avoir égard au mouvement du Fluide renfermé dans la partie $KQSR$, & cette conſidération eſt d'autant plus néceſſaire, que cette partie eſt quelquefois fort conſidérable, comme on le voit dans la Figure 45.

Lorſque la partie $KQSR$ eſt peu conſidérable, comme dans la Figure 44, alors on ne peut guères imaginer que la partie KQ parvienne en QS autrement que par une eſpéce de rotation, en ſe tranſportant d'abord en Qk, puis en QR, puis en Qr, & de-là en QS. Mais comme la portion de Fluide $KQSR$ eſt fort petite, il eſt permis de n'y avoir aucun égard.

Lorſque la partie $KQSR$ eſt fort grande, comme dans la Figure 45, alors il faut imaginer que la partie KQ parvient en QR par une eſpéce de rotation, & de même que la partie qr parvient en qS par une eſpéce de rotation, & que la partie $QRrq$ ſe meut de a vers i: donc nommant s les parties ao de la ligne ai, on aura $\int dx\,(p\,dt - dv) + \int ds\,dv = \int dz\,(p\,dt + dv)$.

REMARQUE II.

128. Si la branche $PLSQ$ (Fig. 44.) eſt infiniment grande par rapport à la branche $CDKQ$, en ce cas le Fluide deſcendra dans la branche $CDKQ$ ſans monter ſenſiblement dans la branche $PLQS$, & par conſéquent BE pourra être regardée comme une conſtante qu'on ſuppoſera égale à b. Dans ce cas, ſi on nomme CD, k; AZ, q, la différence des forces vives d'un inſtant à l'autre, ſera $2Nudu - \frac{uu.dq.GH^2}{k}$; il faudra faire cette quantité égale à $-2p.kdq\,(q-b)$, & l'on aura une Equation d'où l'on tirera l'expreſſion de la vîteſſe.

REMARQUE III.

129. Dans la ſolution du Problême précédent, nous avons ſuppoſé que les tranches *CD*, *PL* conſervoient dans leur mouvement une ſituation horizontale, & ce que nous avons appellé leur vîteſſe, n'étoit, à proprement parler, que leur vîteſſe eſtimée ſuivant la direction verticale : de ſorte que la conſervation des forces vives n'a lieu dans notre ſolution qu'improprement. On pourroit ſuppoſer que le Fluide ſe mût de maniere que les ſurfaces *CD*, *PL*, fuſſent perpendiculaires aux parois du Tuyau. C'eſt d'après cette ſuppoſition, que M. *Daniel Bernoulli* a réſolu le Problême dont il s'agit ici. On peut encore appliquer très-aiſément nos Principes à ce cas-là, & faire voir que la conſervation des forces vives y a lieu, étant priſe dans ſon ſens propre. C'eſt peut-être en partie cette raiſon qui a déterminé M. *Daniel Bernoulli* à ſuppoſer que les ſurfaces *CD*, *PL* étoient perpendiculaires aux parois du Tuyau.

Comme notre Principe s'applique également à l'un & à l'autre cas, c'eſt à l'Expérience à décider laquelle des deux ſuppoſitions l'on doit ſuivre. Il eſt certain que la vîteſſe du Fluide eſtimée ſuivant la longueur d'une des branches dans le ſecond cas, ſera à cette même vîteſſe dans le premier cas, comme le quarré du Sinus d'inclinaiſon de cette branche eſt au quarré du Sinus total, au moins en ſuppoſant que chaque branche ſoit cylindrique. D'où l'on voit que la vîteſſe du Fluide ſera fort diffé-

rente dans les deux cas, & qu'ainſi la longueur d'un Pendule iſocrone aux vibrations du Fluide, ne doit pas être la même dans le premier cas que dans le ſecond. M. *Daniel Bernoulli* dit que les Expériences qu'il a faites là-deſſus s'accordent avec ſa Théorie, autant qu'il a pû en juger; cependant il ne paroît pas donner ces Expériences pour bien exactes. *

Quoi qu'il en ſoit, on ne peut ſuppoſer dans une Théorie rigoureuſement exacte, ni que les tranches *CD, PL* demeurent horizontales, ni qu'elles ſoient perpendiculaires aux parois du Tuyau; à moins qu'on ne ſuppoſe dans ce dernier cas une force d'adhérence entre les parties du Fluide. Sur quoi voyez les art. 115 & 116 ci-deſſus. C'eſt pourquoi le calcul du mouvement d'un Fluide dans un Syphon devant néceſſairement être appuyé ſur l'une ou l'autre des deux hypothèſes précédentes, qui ont l'une & l'autre leurs difficultés, puiſque dans l'un & l'autre cas, il faudroit négliger la force qui agiroit dans le ſens des ſurfaces *CD, PL,* il eſt évident qu'il reſte de l'incertitude dans le réſultat de ce calcul, & qu'on ne pourra guères aſſigner le mouvement des Fluides dans des Syphons par des formules analytiques préciſes & rigoureuſes, mais ſeulement par des hypothèſes & des Equations approchées.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe par pluſieurs ouvertures à-la-fois.

130. Soit un vaſe *ACPLQRplDB*, (Fig. 46.) de

* Hydrodyn. pag. 122, 123.

figure

figure quelconque, & duquel s'écoule par deux ouvertures différentes PL, pl, un Fluide renfermé dans ce vaſe, & dont la ſurface ſupérieure ſoit CD; il eſt évident, 1°. que les particules du Fluide doivent à un certain point s ſe ſéparer pour ſortir les unes par l'ouverture PL, les autres par l'ouverture pl. 2°. Que quand la tranche cs eſt parvenue en xO, la tranche sd parvient en $q\delta$. 3°. De plus, il faut que la vîteſſe de la tranche xO ſoit la même que celle de la tranche $q\delta$. Car ſoit v la vîteſſe des tranches cs, sd, qui eſt la même pour toutes les deux, u celle de la tranche xO, u celle de $q\delta$, il eſt clair que la tranche cs animée de la vîteſſe $v - u$, & la tranche sd animée de la vîteſſe $v - u$ doivent être en équilibre avec les autres tranches. Or il ne pourroit y avoir d'équilibre (*art.* 36.) ſi $v - u$ n'étoit pas = à $v -$ u; donc $u =$ u. 4°. De-là il s'enſuit que les Courbes sO, sq doivent être telles dans leur origine, que xO ſoit à $cs :: q\delta : sd$. car on a $v : u :: xO : cs$ & v : u :: $q\delta : sd$; donc &c. 5°. Si on nomme u la vîteſſe de la tranche cd, V la vîteſſe d'une tranche quelconque KZ de la partie $CDdc$, v celle d'une tranche quelconque YV de la partie $sOLPC$, v celle d'une tranche quelconque yu de la partie $sqplc$, on aura $V = \frac{u(cs+sd)}{KZ}$; $v = \frac{u.cs}{YV}$; V $= \frac{u.sd}{yu}$: & appellant les indéterminées EF, X; GH, x; gh, x; il faudra que $cs.\int(p\,dt - dV) \times dX. = cs.\int(p\,dt - dv)\,dx$, & que de même $sd \times$

$(\int p\,dt - dV)\,dX = s\,d.\int(p\,dt - dv)\,dx$. Donc si on appelle N, ce que devient la quantité $\int \frac{c\,d^2.dX}{KZ}$, lorsque $X = ES$; n, ce que devient la quantité $\int \frac{c\,s^2.dx}{YV}$ lorsque $x = GM$; n, ce que devient la quantité $\int \frac{s\,d^2.dx}{y\,u}$ lorsque $x = gm$; enfin, qu'on appelle les lignes ES, q; GM, a; gm, b; CD, k; PL, K; pl, K; cs, m; sd, m: on aura $(-2KKmkkpqdq - 2KKkmNudu + KKmuudq \times (kk - [m+\mathrm{m}]^2) - 2KKmkkpadq - 2KKknudu \times (m+\mathrm{m}) + uukkmdq\,(mm - KK) = 0$.

On aura de même une autre Equation qui ne différera de celle-ci qu'en ce qu'il y aura K pour K, m pour m, n pour N, & ces Equations serviront à déterminer la vîtesse u. Mais comme on tire une valeur de u de chacune de ces Equations, il faut que le point s & les Courbes sqR, sOQ, soient tels que les deux valeurs de u déterminées par ces Equations, soient égales.

REMARQUE I.

131. La solution précédente ne nous fait point connoître le point s ni les Courbes sqR, sOQ: nous savons seulement que ce point s doit être tel, 1°. que xO soit à $cs :: q\delta : sd$: 2°. que l'on tire des deux Equations du Problême la même valeur de u. Mais si on supposoit que les lignes sqR, sOQ fussent des lignes droites; ce qu'on peut supposer sans erreur sensible, puisque

les quantités n & n demeureront toujours à peu près les mêmes; alors les deux conditions dont nous venons de faire mention, ſerviroient à déterminer le point s.

Corollaire I.

132. Si les ouvertures PL, pl ſont fort petites, il eſt aiſé de voir (*art.* 108.) que la vîteſſe du Fluide en PL eſt = à $\sqrt{(2p[q+a])}$, & que par la même raiſon la vîteſſe du Fluide en pl, ſera égale à $\sqrt{(2p[b+q])}$; d'où l'on voit qu'alors cs doit être à $sd :: PL \times \sqrt{(a+q)}$ eſt à $pl \times \sqrt{(b+q)}$: car la vîteſſe de cs & celle de sd doivent être égales.

Corollaire II.

133. Si $CYPLsyplD$ (Fig. 47.) eſt un vaſe de figure quelconque, dans lequel les ouvertures PL, pl, ſoient à la même hauteur, & qui ſoit tel que les tranches ou ordonnées YV, yu ſoient toujours entr'elles comme cs à sd, ou comme PL à pl, on tirera dans le cas de l'*article* 130, la même valeur de u de chacune des Equations qui la renferment, & la vîteſſe du Fluide ſortant par PL, & par pl ſera la même que celle du Fluide qui ſortiroit d'un vaſe ſimple qui n'auroit qu'une ſeule ouverture égale à $PL+pl$, & dont les ordonnées ſeroient égales à la ſomme des ordonnées correſpondantes $YV+yu$.

Corol. III.

134. Si le point s eſt infiniment proche de PL &

de pl, & que cs ſoit à sd comme PL à pl, on tirera des deux Equations de l'*article* 130, la même valeur de u. Car alors $n = o$, n = o & K $m = K$ n. Donc &c.

COROL. IV.

135. Donc ſi un vaſe $ABXK$, (Fig. 48.) eſt percé de deux ouvertures PL, pl, on peut ſuppoſer que la vîteſſe du Fluide qui ſort par PL, eſt la même que celle du Fluide qui ſort par pl. Car le point S où les particules du Fluide ſe ſéparent, ne doit pas être fort éloigné du fond (*article* 111.). De plus, on doit ſuppoſer (*art.* 130, n. 4.) que cs eſt à sd comme PL à pl, puiſque cs & sd ſont infiniment proches de PL & de pl. Donc &c.

COROL. V.

136. Donc le Fluide qui ſort d'un pareil vaſe, ſort avec la même vîteſſe avec laquelle il ſortiroit de ce même vaſe, s'il n'y avoit qu'une ſeule ouverture égale à $PL + pl$.

REMARQUE II.

137. La Théorie du mouvement des Fluides, lorſque les vaſes ont plus de deux ouvertures, dépend des mêmes Principes que nous venons d'établir. C'eſt pourquoi il eſt inutile de nous arrêter plus long-temps là-deſſus.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe ſubmergé dans un autre Fluide.

PROBLÊME VII.

138. *Un vaſe de figure quelconque* CDPL (Fig. 49.)

étant supposé rempli de Fluide jusqu'en CD, *& plongé dans un vase* VRMZ *rempli du même Fluide jusqu'en* VZ, *on demande la vîtesse avec laquelle la surface* CD *descend à chaque instant.*

Il est évident que, tandis que la surface CD descend en cd, le Fluide $VNKZ$ monte en uz avec une vîtesse qui est à celle de CD, comme CD à $VN+KZ$, & qu'en général la vîtesse d'une tranche quelconque $py+rq$ de la portion de Fluide $TEZKLPNVT$, sera toujours à la vîtesse de CD comme CD à $py+rq$. Donc si on nomme z les différentes parties Xe de la ligne EX, x les différentes parties AO de la ligne AB, v les vîtesses des différentes tranches du Fluide $CDPL$, v celles des différentes tranches de Fluide $TEZKLPNVT$, on aura $\int dx\,(p\,dt - dv) = \int dz\,(p\,dt + dv)$. Equation d'où l'on tirera la valeur des inconnues que l'on cherche, & de laquelle on peut conclure que la somme des forces vives de la masse $CDPL+TVNPLKZE$ est égale au produit de cette masse par le double de la quantité dont son centre de gravité est descendu.

Corollaire I.

139. Si le vase $VRMZ$ est indéfini en largeur, on pourra supposer que la somme des forces vives de la masse $TVNPLKZE$ est $EX.(VN+KZ).\frac{uu.GH^2}{(VN+KZ)^2} = \frac{EX.uu.GH^2}{VN+NZ}$. Or comme $VN+KZ$ est supposée très-grande, on peut négliger cette quantité, & n'avoir égard

qu'à la ſomme des forces vives du Fluide $CDLP$. De plus, il eſt évident que la ſurface $VN + KZ$ ne peut monter à chaque inſtant que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, & par conſéquent d'une quantité infiniment petite du premier, dans un tems fini. Donc EX peut être regardée comme une conſtante : & par conſéquent le produit de la maſſe $CDLP + TVNPLKZE$ par la deſcente de ſon centre de gravité, ſera à chaque inſtant égal à $2CDdc \times (AB - EX)$.

Ainſi, pour trouver le mouvement du Fluide lorſque le vaſe eſt indéfini, il faut ſuppoſer la différence des forces vives du Fluide $CDLP = \text{à } 2 . CDdc . (AB - EX)$.

Corol. II.

140. Lorſque le Fluide $CDLP$ eſt deſcendu juſqu'à une certaine profondeur, alors l'action du Fluide extérieur l'oblige de rentrer dans le vaſe. Il faut ſuppoſer pour lors $\int dx (pdt + dv) = \int dz (pdt - dv)$, & le Problême n'a aucune difficulté nouvelle.

Scolie I.

141. On aura peut-être quelque peine à concevoir de quelle maniere la partie du Fluide qui ſort du vaſe à chaque inſtant, change de direction pour ſe mouvoir de E vers X dans un ſens contraire à celui dont elle ſe mouvoit. Pour l'imaginer plus aiſément, il n'y a qu'à regarder le Fluide qui ſort par PL comme compoſé de deux parties, qui après être deſcendues verticalement enſemble

au ſortir du vaſe par un eſpace très-petit, changent enſuite de direction peu-à-peu, pour aller l'une vers KZ, l'autre vers NV, à peu près de la même maniere qu'un Fluide change de direction (*article* 127.) pour paſſer d'une branche de Syphon dans l'autre. Ainſi un vaſe $GHPL$ plongé dans un Fluide, peut être regardé comme formant avec $ZMRV$ une eſpéce de double Syphon; d'où il réſulte, que ce que nous avons dit ci-deſſus du mouvement d'un Fluide dans un vaſe qui a deux ouvertures, & du mouvement d'un Fluide dans un Syphon, auroit pû nous conduire à la Théorie du mouvement d'un Fluide dans un vaſe qui eſt plongé dans un autre Fluide.

COROL. III.

142. De-là & des *art.* 128, 139 & 140, il s'enſuit que ſi le vaſe $CDLP$ eſt un vaſe Cylindrique plongé dans un vaſe indéfini, on aura, en appellant la conſtante CD, k; u la vîteſſe de CD; AB, q; EX, b; & faiſant $uu = 2ps$, l'Equation $qds - sdq = -dq(q-b)$.

Si le Fluide $CDPL$ au lieu de deſcendre, étoit obligé à monter par l'action du Fluide extérieur, on auroit $qds + sdq = (b-q)dq$.

SCOLIE II.

143. Il eſt à remarquer, 1°. qu'aucune de ces deux Equations ne s'accorde avec celles qu'a données M. *Daniel Bernoulli*, p. 126 & 135 de ſon Hydrodynamique pour le cas dont il s'agit ici : mais les Equations qu'a

données ce ſavant Géométre, ſont fondées ſur le Principe de la conſervation des forces vives, dans la ſuppoſition, que la vîteſſe du Fluide qui entre ou qui ſort par l'ouverture PL, varie bruſquement en un inſtant d'une quantité finie; ſuppoſition qui paroît avoir quelque choſe de choquant, & dans laquelle outre cela on ne ſauroit faire uſage du Principe des forces vives, comme nous l'avons déja dit.

2°. Les Equations données dans l'*article* 142, ne dépendent ni de la largeur CD, ni de l'ouverture PL, ce qui eſt aſſez ſingulier. Cela vient de ce que nous avons ſuppoſé la quantité N de l'*art.* 128, égale à kq dans le cas de l'*art.* 142. Cependant il eſt aiſé de voir par l'*art.* 112, que cette quantité N n'eſt pas exactement kq. Mais tant que l'ouverture PL n'eſt pas infiniment petite, on peut ſuppoſer $N = kq$ ſans erreur ſenſible. Si PL eſt infiniment petite, alors la valeur de PL doit entrer dans l'expreſſion de N; mais cette quantité eſt alors fort difficile à déterminer, parce qu'on ignore (*art.* 111.) quelles Courbes décrivent les particules pour s'approcher de PL.

En général, la Théorie du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe ſubmergé dans un autre Fluide, paroît avoir beaucoup de rapport avec celle du mouvement des Fluides dans des Syphons; or nous avons remarqué à la fin de l'*art.* 129, combien il reſte encore d'incertitude dans cette derniere Théorie; d'où il eſt naturel de conclure, comme nous l'avons fait dans cet *art.* 129, que

que la même incertitude ſe trouve dans la matiere que nous traitons, & que ſi on peut eſpérer de trouver le mouvement du Fluide qui ſort d'un vaſe ſubmergé dans un autre Fluide, c'eſt par des hypothèſes & des formules qui ne ſeront tout au plus qu'à peu près exactes.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe traverſé de pluſieurs diaphragmes.

144. Lorſqu'une maſſe de Fluide $CDQK$ (Fig. 50.) ſort d'un vaſe $ABQK$ traverſé par pluſieurs diaphragmes RS, EF, &c. qui ſont percés des ouvertures GH, MN, PL; il eſt conſtant, ainſi que nous l'avons déja remarqué, que les particules du Fluide qui ſont proches de chaque diaphragme, s'approchent de l'ouverture dont elles ſont voiſines par des lignes très-obliques dH, eG; &c. Par la même raiſon elles doivent, à la ſortie de chaque ouverture, s'en écarter ſuivant des lignes très-obliques $G\varepsilon$, $H\delta$, pour venir remplir la place que leur laiſſe le Fluide inférieur, qu'elles auroient beaucoup plus de peine à diviſer. Il ſemble donc qu'on peut regarder un Fluide qui ſe meut dans un tel vaſe, comme s'il ſe mouvoit dans un vaſe tel que le repréſente la Figure 51, qui fût, pour ainſi dire, étranglé en GH, MN, PL; & en appliquant à cette ſorte de vaſe, ce que nous avons dit ſur le mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de figure quelconque, on trouvera les Loix du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe tel que celui dont il s'agit. On aura donc, en conſervant les noms de l'*art.* 105, l'Equation

même que nous avons donnée dans cet article pour le cas d'un vaſe de figure quelconque.

D'où il eſt aiſé de voir, 1°. que ſi les ouvertures PL, MN, GH &c. ſont fort petites, la vîteſſe du Fluide au commencement du mouvement ſera fort différente de ce qu'elle auroit été, ſi le vaſe n'eût point eu de diaphragme & n'eût été percé que de la ſeule ouverture PL.

2°. Que quand la ſurface CD ſera deſcendue d'une quantité infiniment petite, alors la vîteſſe du Fluide ſortant par PL, ſera $= \grave{a} \sqrt{[2p.q]}$, préciſément comme s'il n'y avoit que cette ouverture PL ſans aucun diaphragme.

SCOLIE.

145. Au reſte, je ne prétends pas donner pour exactement vraies, les Loix que je viens d'expoſer dans l'article précédent : comme il s'agit ici d'un Fluide qui coule dans un vaſe de figure très-irréguliere, il ſe pourroit faire que le mouvement du Fluide ne pût être ſoumis au calcul, à cauſe de ſon irrégularité.

M. *Daniel Bernoulli* a même donné dans ſon Ouvrage, des Loix fort différentes de celles que je viens d'établir; mais comme ces Loix ne ſont appuyées que ſur le Principe des forces vives, qu'il applique même au cas dont il s'agit avec une eſpéce de tatonnement, j'avoue que je ne puis pas en être entiérement ſatisfait, & je regarde l'Expérience comme le meilleur moyen par lequel on puiſſe découvrir les Loix du mouvement du Fluide dans le cas dont il s'agit.

De la preſſion qu'un Fluide qui ſe meut dans un vaſe, exerce contre ſes parois.

146. Puiſque (*art.* 100.) $\frac{p\,dx}{v} - dv$ repréſente la petite vîteſſe avec laquelle chaque tranche devroit tendre à ſe mouvoir pour reſter en équilibre, il s'enſuit que $\frac{p\,dx}{v\,dt} - \frac{dv}{dt}$ repréſente la force accélératrice indéterminée, en vertu de laquelle chaque tranche reſteroit en repos. Donc (*n.* 2. *art.* 23.) à une hauteur quelconque AO, x, (Figure 32.) la preſſion eſt $\int p\,dx - \int \frac{dx\,dv}{dt} = p.AO - \left(\frac{2Nudu+uudN}{2.dt.u.GH}\right)$.

Il eſt à remarquer que l'Aire N ou $\int \frac{GH^2\,dx}{y}$ doit être priſe ici depuis la ſurface CD juſqu'à la tranche KZ dont on cherche la preſſion; que $dt = \frac{k.Ff}{u.GH}$, & que $dN = Ff.GH^2.\left(\frac{CD^2 - KZ^2}{KZ^2.CD}\right)$.

De plus, ſi l'on fait $uu = 2ps$, comme la valeur de u eſt connue par les Problêmes précédens, on aura par ces mêmes Problêmes la valeur de ds en Ff. Donc la preſſion ſera exprimée en termes tout finis, dont chacun ſera affecté de la quantité p.

COROLLAIRE I.

147. Si on ſuppoſe $p.AO - \left(\frac{2Nudu+uudN}{2Ff.k}\right) = p.r$,

on aura la hauteur r dûe à la vîteſſe avec laquelle le Fluide s'échapperoit, ſi l'on faiſoit une petite ouverture en Z. Car conſidérant toutes les tranches comme animées de la force $p - \frac{dv}{dt}$ qui les retient en équilibre; il eſt clair (*art.* 108.) que pour avoir la hauteur r dûe à la vîteſſe avec laquelle le Fluide s'échapperoit, ſi on faiſoit une ouverture en Z, il faut ſuppoſer $\int (p - \frac{dv}{dt}) dx = p.r.$ Donc &c.

La Méthode de M. *Daniel Bernoulli*, pour déterminer la preſſion en un endroit quelconque Z, conſiſte à chercher avec quelle vîteſſe le Fluide s'échapperoit, ſi on faiſoit en cet endroit une ouverture. Il eſt évident que par cette Méthode on trouve la même valeur que nous venons d'aſſigner à la preſſion : mais il faut avouer auſſi que cette Méthode eſt indirecte.

COROL. II.

148. On voit aiſément que la preſſion eſt nulle en CD, PL, c'eſt-à-dire, aux endroits du vaſe qui répondent à la ſurface tant ſupérieure qu'inférieure du Fluide. Car, 1°. à la ſurface CD, on a $AO = o$, $N = o$. 2°. à la ſurface PL, on a par les ſolutions des Problêmes précédens $\int dx \, (p - \frac{dv}{dt}) = o$. Cette propoſition eſt d'ailleurs aiſée à démontrer par le *n.* 2, *art.* 23.

COROL. III.

149. Si la quantité indéterminée $\int dx \, (p - \frac{dv}{dt})$ dont

les deux valeurs extrêmes ſont zero, comme nous venons de le voir, a pour une hauteur quelconque AO, une valeur négative, alors le Fluide ceſſera (*art.* 103.) d'être continu dans le Tuyau, au moins ſi on fait abſtraction de l'adhérence des parties.

M. *Daniel Bernoulli* prétend qu'alors la preſſion doit ſe changer en ſuction; mais cela me paroît fort difficile à concevoir. Car tout ce qui arrive alors, ce me ſemble, c'eſt que la tranche KZ au lieu d'être preſſée de A vers O, eſt preſſée de O vers A; or ſoit que la tranche KZ ſoit preſſée de O vers A, ou de A vers O, la preſſion ne réagit pas moins contre les parois du vaſe ſuivant des lignes perpendiculaires à ces parois.

Il faut pourtant avouer que ſi on a égard à la preſſion de l'air environnant, dont nous avons fait abſtraction juſqu'ici, & qui eſt en effet une circonſtance étrangere, la preſſion que ſouffriront les parois du vaſe, ſera ou pourra du moins être dirigée de dehors en dedans; ſur quoi, voyez nos *Opuſcules Mathématiques*, Tom. 1, p. 160, & ſuivantes. C'eſt à cette occaſion que M. *Euler* m'écrivoit le 29 Décemb. 1746. *Je crois que vos raiſons* (contre la prétendue ſuction) *ſont auſſi bien fondées que celles de M.* Bernoulli, *& que c'eſt à une circonſtance étrangere* (ſavoir à la preſſion de l'air environnant) *qu'il faut attribuer l'effet de la ſuction, que l'Expérience montre trop clairement pour qu'on en puiſſe douter.* Auſſi n'ai-je point prétendu nier les Expériences que M. *Bernoulli* a faites à ce ſujet, & qui ne ſont nullement contraires à ma Théorie.

COROL. IV.

150. A l'égard de la force qu'il faut employer pour ſoutenir le vaſe, cette force eſt égale (*n.* 1, *article* 23.) à $\int y\,dx\left(p-\frac{dv}{dt}\right)-\int PL.\,dx\left(p-\frac{dv}{dt}\right)$, ou ſimplement à $\int y\,dx\left(p-\frac{dv}{dt}\right)$; dans cette derniere quantité, la partie $\int p\times y\,dx$ eſt égale au poids total du Fluide contenu dans le vaſe, & la partie $\int\frac{y\,dx.\,dv}{dt}$ eſt égale à $\int\frac{y\,dx.(y\,du-u\,dy).GH}{yy\,dt}=\frac{AB.u\,du.GH^2}{k.Ff}+\frac{uu.GH^2.(k-K)}{K.k}$. On aura donc la valeur de la force qu'on cherche.

Si PL eſt fort petite, on aura pour lors (*art.* 108.) $uu.GH^2=2p.AB.KK$, & l'expreſſion de la force cherchée ſe réduit alors à $\int p\,y\,dx$.

Ainſi, lorſqu'un Fluide s'écoule d'un vaſe par une très-petite ouverture, la puiſſance néceſſaire pour ſoutenir le vaſe eſt égale au poids du Fluide.

REMARQUE.

151. Au reſte, dans la détermination que nous venons de donner de la preſſion, nous faiſons abſtraction de l'effort que le Fluide peut faire contre le vaſe par ſon mouvement. Car, comme l'obſerve M. *Jean Bernoulli* dans ſon Hydraulique, un Fluide qui deſcend dans un vaſe qui va en ſe retréciſſant, frappe les côtés du vaſe avec une certaine obliquité, & la force qui en réſulte, peut altérer

celle qui provient de la preſſion; nous ne croyons pas cependant que l'effet de cette force doive être fort ſenſible, parce qu'il y a apparence que les particules contigues au vaſe, ont des mouvemens obliques & parallèles aux côtés du vaſe. Or ce ſont ces particules qui devroient influer le plus dans l'effet dont il s'agit.

On trouvera de nouvelles recherches ſur la preſſion des Fluides, ſoit en mouvement, ſoit en repos, dans notre *Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides*, Chap. 3, art. 21 & ſuivans. Cette matiere y eſt enviſagée d'une maniere encore plus ſimple & plus générale, que nous ne l'avons fait ici. Nous y renvoyons le Lecteur.

Des Fluides qui ſe meuvent dans des vaſes mobiles.

PROBLÊME VIII.

152. *Trouver la vîteſſe d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de figure quelconque, entraîné par un poids* M (Fig. 52.)

Soit p la peſanteur, tant du poids que du Fluide, u la vîteſſe qu'auroit la ſurface GH, en faiſant abſtraction de ſon mouvement commun avec le vaſe, v la vîteſſe indéterminée des tranches du Fluide au-dedans du vaſe, v la vîteſſe variable avec laquelle le poids deſcend en embas, & le vaſe monte en enhaut; il eſt évident que $v - v$ ſera la vîteſſe abſolue de chaque tranche du Fluide à chaque inſtant. Dans l'inſtant ſuivant cette vîteſſe ſe changeroit en $v - v + \frac{p\,dx}{v}$, ſi rien ne s'oppoſoit au mouvement naturel de chaque tranche, mais par la réſiſtance

du poids & l'action mutuelle des tranches, elle se trouve changée en $v + dv - v - dv$. Il faut donc regarder la vîtesse $v - v + \frac{p\,dx}{v}$ comme composée de la vîtesse $v + dv - v - dv$, & de la vîtesse $\frac{p\,dx}{v} + dv - dv$ qui doit être anéantie.

De même le poids M tend à se mouvoir avec une vîtesse $= v + \frac{p\,dx}{v}$; mais comme cette vîtesse se change en $v + dv$, il s'ensuit que la vîtesse $\frac{p\,dx}{v} - dv$ doit être détruite.

De-là il s'ensuit, 1°. que les tranches du Fluide animées de la vîtesse $\frac{p\,dx}{v} + dv - dv$, doivent être en équilibre au-dedans du vase, 2°. que la pression qui en résulte contre le vase, doit être égale à l'effort du poids M animé de la vîtesse $\frac{p\,dx}{v} - dv$: on aura donc ces deux Equations

$$\int dx \left(\frac{p\,dx}{v} + dv - dv \right) = 0;$$

$$\& M \left(\frac{p\,dx}{v} - dv \right) = \int y\,dx \left(\frac{p\,dx}{v} + dv - dv \right) - PL \times \int dx \left(\frac{p\,dx}{v} + dv - dv \right);$$

ou (divisant le tout par la constante $dt = \frac{dx}{v}$, & faisant $dv = \pi\,dt$)

$$[p + \pi] \cdot AB - \int \frac{dx\,dv}{dt} = 0;$$

&

& $M(p-\pi)=\int[p+\pi]\cdot y\,dx-\int\frac{y\,dx\cdot dv}{dt}$.

On remarquera que les valeurs de $\int dx\,dv$ & de $\int y\,dx\,dv$ ont été trouvées dans les *articles* 96 & 151. Mettant donc ces valeurs dans les Equations précédentes, on tirera de chacune de ces Equations une valeur de π; & la comparaiſon de ces deux valeurs donnera une nouvelle Equation, dans laquelle ſe trouveront uu & $u\,du$, & qui pourra être intégrée par les Méthodes connues; u étant connue, on aura la valeur de π; & on connoîtra par conſéquent l'eſpace que le poids M a parcouru en deſcendant & le vaſe en montant, dans le temps que la ſurface CD s'eſt abaiſſée d'une quantité quelconque. Car ſoit ζ la quantité dont le poids M eſt deſcendu, lorſque CD eſt à une diſtance quelconque s de PL, on aura $\frac{d\zeta}{v}=-\frac{k\,ds}{u\cdot GH}$, & $\pi\,d\zeta=v\,dv$: deux Equations d'où l'on tirera facilement les valeurs de v & de ζ.

Corollaire I.

153. Si c'étoit le vaſe qui entraînât le poids, au lieu qu'on a ſuppoſé que c'étoit le poids qui entraînoit le vaſe, il n'y auroit d'autres changemens à faire dans les calculs précédens, que de ſuppoſer π négatif.

Corol. II.

154. Si l'ouverture PL eſt fort petite, & qu'on faſſe $\frac{u^2\cdot GH^2}{PL^2}=2pr$, pour avoir la hauteur r dûe à la vîteſſe

de l'eau qui ſort, abſtraction faite de la vîteſſe du vaſe, on trouvera $(p+\pi).AB=p.r$, & en appellant μ la maſſe du Fluide,

$$M(p-\pi)=[p+\pi].\mu.$$

$$\text{Donc } \pi=\frac{(M-\mu):p}{M+\mu}, \text{ \& } r=\frac{2M.AB}{M+\mu}.$$

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli*, Sect. XI, *art.* 19 de ſon Hydrodynamique, par une Méthode fort différente de la nôtre, & pour le ſeul cas d'un vaſe Cylindrique percé d'un petit trou.

COROL. III.

155. Nous ne nous arrêterons point à déterminer ici les cas où le Fluide doit ceſſer d'être continu dans le Tuyau, ni la quantité de la preſſion que le Fluide exerce contre le vaſe en un endroit quelconque. Tout cela doit être facile à trouver par les Méthodes que nous avons données pour cela dans les *art.* 98 & 103.

PROBLÊME IX.

156. *Trouver le mouvement d'un Fluide* CABD (Fig. 53.) *renfermé dans un vaſe* ACDL *entraîné par un poids* K.

1°. Il eſt évident que la ſurface AB du Fluide doit s'incliner. Car la peſanteur du Fluide ſuivant al doit ſe décompoſer en deux forces, dont l'une ſoit ſuivant ab parallèle à SG, & l'autre ſoit détruite. Or cette derniere force ne peut être détruite, qu'elle ne ſoit perpendiculaire à la ſurface du Fluide : donc ſi on appelle p la peſan-

teur du Fluide & du Corps, π la force ſuivant ab, commune au Fluide & au Corps, φ la force ſuivant ag qui doit être détruite, LB, x, AL, a; on aura $p.\pi :: AL.LB$; donc $\pi = \frac{px}{a}$. Il faut de plus, que le poids K animé de la force $p - \pi$ ſoit en équilibre avec le Fluide animé de la force φ ſuivant ag: or ſi le vaſe n'étoit point ſoutenu en CD, il ſeroit preſſé ſuivant ag (*art.* 14.) avec une force = à $\varphi . ACDB$: la force qui en réſulte ſuivant DC eſt $\varphi . \frac{ACDB \times gl}{ag} = \pi . ACDB$. Donc nommant M la maſſe $ACDB$, on aura $K\left(p - \frac{px}{a}\right) = \frac{M.px}{a}$, d'où l'on tire $x = \frac{aK}{M+K}$ & $\frac{x}{\sqrt{[aa+xx]}}$ ou le Sinus de l'Angle $LAB = \frac{K}{\sqrt{[MM+2MK+2KK]}}$.

SCOLIE.

157. Il eſt à remarquer que la preſſion contre un point quelconque O eſt proportionnelle à $\varphi . KO$; ou, ce qui eſt la même choſe, à $p . AO$, à cauſe que $p : \varphi :: al : ag :: KO : AO$.

Méthode pour déterminer les endroits où doit ſe diviſer un Fluide qui coule dans un vaſe.

Après avoir déterminé dans les *articles* 98 & 103, en quels cas le Fluide doit néceſſairement ſe diviſer en pluſieurs portions, il nous reſte à chercher en quels en-

droits le Fluide doit se diviser ; nous supposerons d'abord qu'on fasse abstraction de l'adhérence des parties.

158. PROPOS. I. *Tous les endroits* KZ (Fig. 54.) *où le Fluide se divise, doivent conserver dans l'instant de la séparation la même vîtesse qu'ils avoient auparavant.*

Car le Fluide ne se divise, que parce que la masse *CDZK* n'a point d'action sur la masse *KZLP;* donc ces deux masses doivent être regardées comme entiérement séparées l'une de l'autre : or, cela posé, la vîtesse de la petite Couche *KZTS* ne peut (*art.* 98.) que demeurer la même, ou diminuer; celle de la petite Couche *FGZK* ne peut au contraire que demeurer la même, ou augmenter : mais si la vîtesse de *FGZK* augmentoit, tandis que celle de *KZTS* diminue, le Fluide ne se diviseroit pas en *KZ*, contre l'hypothèse. Donc la vîtesse de *FGZK* & celle de *KZTS* doivent demeurer les mêmes. *Ce Q. F. D.*

159. PROPOS. II. *On suppose que toutes les tranches* CD, KZ, PL, &c. *d une masse de Fluide donnee* CDLP *sont animées par des forces accélératrices, qui tendent toutes de* A *vers* B, *& qui soient représentées par les ordonnees correspondantes* cd, kz, pl, *de la Courbe* dzl; *on suppose encore que ces tranches n'ayent aucune autre impulsion que celle qu'elles reçoivent de l'action de ces forces : & on demande la vîtesse que doit prendre chaque tranche.*

Solution. Soit décrite la Courbe *euf*, dont les ordonnées *ce, ku, pf &c.* soient entr'elles en raison inverse

des ordonnées correſpondantes CD, KZ, PL &c. & qui ait de plus cette propriété que l'Aire $ceufpc$ ſoit égale à l'Aire $cdzlpc$.

Cela poſé, il eſt évident que ſi on nomme $AO, x, zk, s, ku = r$, on aura $den - nfl = o$ & $\int dx(s - r) = o$.

Donc, 1°. ſi $\int dx(s - r)$ n'a aucune valeur négative, les lignes ce, ku, pf &c. repréſenteront les vîteſſes des différentes tranches du Fluide, qui ne doit faire pour lors en coulant qu'une maſſe continue (*art.* 99.)

2°. Si $\int dx(s - r)$ a des valeurs négatives, alors le Fluide doit néceſſairement ſe diviſer, & on ſe ſouviendra (*art.* 158.) que dans l'endroit où il ſe diviſe, la force accélératrice ne doit point être altérée. Il faut donc que la Courbe $ebnf$ (Fig. 55.) ſoit alors tellement placée, que l'Aire $abunfp = abznlp$ & que la quantité $\int dx(s-r)$ n'ait aucune valeur négative depuis a juſqu'en p. Si cette double condition peut être obſervée (& elle le ſera toujours quand les forces accélératrices des tranches inférieures du Fluide ſeront entr'elles en plus grande raiſon, que la raiſon inverſe des tranches correſpondantes) alors la portion de Fluide compriſe entre les deux tranches correſpondantes à ab & à pl, deſcendra en formant une maſſe continue, les vîteſſes infiniment petites de chaque tranche étant repréſentées par les ordonnées correſpondantes, ab, uk, &c: il faudra chercher enſuite le mouvement de la portion de Fluide qui eſt depuis c juſqu'en a, en regardant cette portion comme entiérement diſtinguée de l'autre.

3°. Si la double condition dont nous venons de parler, ne ſauroit être obſervée, en ce cas il faudra que la Courbe *enuf* (Fig. 56.) ſoit placée de maniere qu'elle coupe *dzl* en deux points *h*, tels que l'Aire *gnuoq* = *gnriztoq*, & que $\int dx\,(s - r)$ n'ait aucune valeur négative depuis *g* juſqu'en *q*. En ce cas toutes les tranches depuis *g* juſqu'en *q* ſeront mues avec une vîteſſe infiniment petite, repréſentée par l'ordonnée correſpondante de la Courbe *nuo*; toutes les tranches depuis *q* juſqu'en *p*, ſe ſépareront les unes des autres; & à l'égard des tranches depuis *c* juſqu'en *g*, il faudra chercher leur mouvement en les regardant comme formant une maſſe entiérement ſéparée du reſte du Fluide.

Il eſt évident que par la combinaiſon des Méthodes précédentes, on trouvera tous les endroits, où le Fluide doit ſe diviſer. Car après avoir, par exemple, déterminé dans le cas du *n.* 3. le point *a* (Fig. 55.) qui répond à celui où le Fluide doit ſe diviſer, on regardera la maſſe depuis *a* juſqu'en *c*, comme une maſſe iſolée à laquelle on appliquera les Méthodes expliquées dans les trois cas précédens, pour trouver en combien de portions cette maſſe doit ſe ſéparer. Car il n'eſt pas douteux que cette maſſe ne doive ſe diviſer en pluſieurs portions. En voici la preuve. Si elle ne ſe diviſoit pas, la vîteſſe de la tranche qui répondroit au point *a*, & qui ſeroit la tranche inférieure de cette maſſe, ne pourroit que reſter la même ou augmenter (*art.* 99.) 1°. Si cette vîteſſe reſtoit la même, en ce cas, les tranches depuis *c* juſqu'en *a* ne

feroient plus qu'une même maſſe avec les tranches depuis *a* juſqu'en *p*, & alors on retomberoit dans le cas du *n.* 1 : 2°. Si la vîteſſe augmentoit, on ne pourroit pas ſuppoſer que le Fluide ſe diviſât au point qui répond à *a*.

4°. Enfin, ſi aucune des conditions énoncées dans le *n.* 3. précédent, ne peut être obſervée, en ce cas toutes les tranches du Fluide ſe ſépareront les unes des autres; & cela arrivera, par exemple, ſi toutes les forces accélératrices ſont entr'elles en moindre raiſon, que la raiſon inverſe des tranches qu'elles animent.

Il faut cependant remarquer qu'il peut arriver que le Fluide ne ſe diviſe pas : mais du moins ſes parties contigues aux côtés du vaſe s'en détacheront alors, & on ne pourra plus regarder le Fluide comme coulant dans le vaſe. Par exemple, ſuppoſons le vaſe en forme de cône tronqué qui aille en s'élargiſſant de haut en bas; imaginons que le Fluide vienne tout-à-coup à tomber par l'effort de ſa peſanteur, il eſt évident que la vîteſſe de toutes ſes parties étant égale, il tombera comme feroit une maſſe ſolide, & ſe détachera dès le premier inſtant de ſa chûte des parois du vaſe où il eſt renfermé. Mais ſi la peſanteur agiſſoit ſur les parties inférieures avec plus de force que ſur les parties ſupérieures, & tendoit à leur donner plus de vîteſſe, alors le Fluide non-ſeulement quitteroit le vaſe, mais ſe ſépareroit en pluſieurs portions.

C'eſt pourquoi, quand nous dirons dans la ſuite que le Fluide ſe diviſe, nous entendrons, ou qu'il quitte ſim-

plement les parois du vaſe, ou qu'en les quittant, il ſe ſépare en pluſieurs portions.

160. *Remarque I.* Nous avons ſuppoſé ci-deſſus, que toutes les forces accélératrices cd, kz, &c. étoient dirigées de A vers B (Fig. 54.). Mais ſi les unes ſont dirigées de A vers B, & les autres en ſens contraire, c'eſt-à-dire, ſi la Courbe dzl (Fig. 57 & 58.) a des ordonnées poſitives & négatives, en ce cas il faudra tracer la Courbe $frxm$ dont les ordonnées tu ſoient proportionnelles aux Aires $cdhzk$ correſpondantes. Cela poſé,

1°. Si aucune des ordonnées tu (Fig. 57.) n'eſt négative, la Méthode ſera la même que dans l'art. précédent.

2°. Si quelqu'une des ordonnées yx (Figure 58.) eſt négative, en ce cas il faudra d'abord trouver le point x par où paſſe l'extrémité de la plus grande des ordonnées négatives; & il eſt clair (*art.* 26.) que l'on pourra regarder le Fluide comme compoſé de deux parties, dont l'une, terminée par les tranches qui répondent aux points n & c, eſt preſſée ſuivant nc, l'autre terminée par les tranches qui répondent aux points n, p, eſt preſſée ſuivant np. On regardera ces deux portions comme deux maſſes ſéparées l'une de l'autre; on cherchera par la Méthode du Problême précédent, le mouvement des tranches depuis n juſqu'en p, qui doit être ſuivant np; & par la même Méthode, on cherchera (en renverſant la Figure, pour ne ſe point embarraſſer) le mouvement des tranches depuis n juſqu'en c, qui doit être ſuivant nc.

Il eſt à remarquer que la tranche qui répond à n, &

qui

qui eſt le terme commun des deux maſſes, doit n'avoir aucun mouvement (*art.* 158.) puiſque ſa force accélératrice eſt nulle; d'où il s'enſuit que non-ſeulement les deux maſſes doivent ſe ſéparer l'une de l'autre, mais ſe diviſer auſſi chacune en pluſieurs portions, qu'on trouvera par les Méthodes précédentes.

161. *Remarque II.* Comme la Courbe *dzl* (Fig. 54.) eſt donnée dans le cas de l'*art.* 159, & que la Courbe *eunf* eſt donnée d'eſpéce, ayant ſes ordonnées en raiſon inverſe des tranches correſpondantes, on pourra toujours, les quadratures étant ſuppoſées, ſe ſervir du calcul pour déterminer ſi les différentes conditions, dont nous avons parlé dans les 4 *n.* de l'*article* 159, peuvent avoir lieu; le calcul à la vérité ſera plus ou moins difficile, ſelon les différens cas : mais il ſuffit ici d'avoir réduit le Problême, comme on l'a fait, à une queſtion de pure Géométrie.

162. *Remarque III.* Les Problêmes précédens ne ſeroient pas plus difficiles, ſi la force accélératrice étoit nulle dans une partie des tranches du Fluide. Il n'y auroit qu'à ſuppoſer alors qu'une portion de la Courbe *dzl* fût coincidente avec ſon Axe, & que les ordonnées de cette portion fuſſent nulles.

163. Prop. III. *Une maſſe de Fluide* CDLP (Fig. 54.) *coulant de* A *vers* B *en vertu d'une impulſion qui lui a été primitivement imprimée, & n'étant animée d'aucune force accélératrice, trouver les endroits où elle doit ſe ſéparer.*

Nous pourrions réſoudre immédiatement & directement ce Problême, comme nous avons fait le précédent; mais nous croyons que la Méthode ſuivante ſera plus facile.

On ſuppoſera d'abord que le Fluide doive former en coulant une maſſe continue, c'eſt-à-dire, qu'on déterminera les vîteſſes dv perdues par chaque tranche, à être telles que $\int dv\,dx$ ſoit $= 0$. On cherchera enſuite par le Problême précédent, les endroits où doit ſe ſéparer le Fluide, en ſuppoſant ſes différentes tranches animées des forces accélératrices dv, & le Problême ſera réſolu.

164. *Remarque.* Il faut obſerver que la conſervation des forces vives a lieu dans le mouvement d'une maſſe de Fluide qui ſe ſépare en pluſieurs parties, comme elle a lieu dans le mouvement d'un Fluide qui forme en coulant une maſſe continue. Car, 1°. la conſervation des forces vives a lieu dans toutes les tranches qui ſe ſéparent les unes des autres, puiſque chacune de ces tranches (*art.* 158 & 159.) conſerve ſa vîteſſe. 2°. Elle a lieu auſſi dans les parties du Fluide qui ſe meuvent en formant une maſſe continue, puiſque l'on cherche par la Méthode des *art.* 159 & 163, le mouvement de ces parties, comme ſi elles formoient une maſſe Fluide iſolée. Donc &c.

Méthode pour déterminer les endroits où le Fluide ſe diviſe, en ayant égard à l'adhérence des parties.

165. Nous avons vû (*art.* 44.) que l'on peut imaginer

que l'adhérence des particules d'un Fluide provienne de différentes cauſes ; ou d'une force active appliquée à la ſurface du Fluide, ou de l'aſpérité de ces mêmes parties, ou enfin de la combinaiſon de ces deux cauſes. Nous allons déterminer dans quels endroits le Fluide doit ſe diviſer, en parcourant par ordre chacune de ces hypothèſes.

I.

166. PROPOS. I. *Si une maſſe de Fluide, abſtraction faite de l'adhérence de ſes parties, peut former en coulant une maſſe continue, elle doit encore former une maſſe continue, quand on ſuppoſera de la ténacité dans ſes parties.*

Car pour que le Fluide forme en coulant une maſſe continue, abſtraction faite de l'adhérence de ſes parties, il faut que chaque tranche animée de la vîteſſe dv ſoit en équilibre, c'eſt-à-dire, que $\int dx\,dv$ ſoit $= 0$. Or, puiſque les tranches ſont en équilibre (*hyp.*) abſtraction faite de l'adhérence de leurs parties, elles y ſeront encore (*art.* 46.) ſi on a égard à cette adhérence. Donc elles doivent ſe mouvoir préciſément, comme ſi elles n'étoient point adhérentes entr'elles.

167. PROPOS. II. *Un Fluide* CDLP, (Fig. 54.) *qui, abſtraction faite de la ténacité de ſes parties, n'auroit pû former en coulant une maſſe continue* (*parce que* $\int dv\,dx$ *auroit eu quelque valeur négative*) *pourra former en coulant une maſſe continue, ſi* $\int dv\,dx$ *eſt* $= 0$, *lorſque* $x = AB$,

& ſi ſdvdx *n'a aucune valeur négative plus grande que la force d'adhérence des parties du Fluide.*

Car pour que le Fluide forme en coulant une maſſe continue, il faut que les tranches animées des vîteſſes dv, combinées avec la force d'adhérence appliquée en CD & en PL, ſoient en équilibre. Or pour cela il faut (*art.* 48 & 52.) que $\int dv\,dx$ ſoit $= 0$, lorſque $x = AB$, & que $\int dv\,dx$ n'ait aucune valeur négative plus grande que la force d'adhérence appliquée en CD & en PL. Donc &c.

168. PROPOS. III. *Si on a égard à l'adhérence des parties, je dis que dans l'endroit* KZ *où le Fluide ſe diviſe, les particules du Fluide doivent conſerver dans l'inſtant de la ſéparation la même vîteſſe qu'elles avoient l'inſtant d'auparavant.*

Car puiſque le Fluide ne ſe ſépare en KZ, qu'à cauſe de l'impoſſibilité qu'il y a que les deux maſſes $CDZK$, $PLZK$ agiſſent l'une ſur l'autre, il s'enſuit qu'on doit regarder chacune de ces maſſes comme deux maſſes iſolées, dont l'une a ſa ſurface ſupérieure CD preſſée par la force d'adhérence, & l'autre a ſa ſurface inférieure PL preſſée par une force pareille. Il faut donc que les tranches qui compoſent la portion $CDZK$, animées des vîteſſes dv, combinées avec la force qui preſſe en CD, ſoient en équilibre, & que de même les tranches qui compoſent la portion $PLZK$, animées des vîteſſes dv combinées avec la force qui preſſe en PL, ſoient en équilibre. Or, cela poſé, la tranche KZ conſidérée comme

tranche inférieure de la maſſe *CDZK*, ne peut que conſerver la même vîteſſe, ou en recevoir une plus grande; au contraire, cette même tranche conſidérée comme tranche ſupérieure de la maſſe *PLZK*, ne peut que conſerver la même vîteſſe, ou en recevoir une moindre. Donc &c.

169. *Remarque.* Il faut obſerver que pour la vérité de cette propoſition, on doit ſuppoſer que les vîteſſes de toutes les tranches du Fluide ſoient repréſentées par des ordonnées *cd*, *zk*, *pl* &c. qui ſoient à une ligne continue, droite ou courbe, & non pas à deux lignes différentes. Car ſi, par exemple, on avoit un Cylindre *CDLP*, (Fig. 59.) rempli de Fluide, tel que toutes les tranches de la partie *CDZK* euſſent une vîteſſe repréſentée par la droite *DO*, & que les tranches de la partie *KZPL* euſſent une vîteſſe repréſentée par la droite *ZQ*: alors le Fluide ſe ſépareroit en *KZ*, ſans que la vîteſſe *ZQ* ou *ZR* demeurât la même. C'eſt qu'alors *KZ* eſt ſuppoſée avoir à-la-fois deux differentes vîteſſes; ſavoir la vîteſſe *ZQ* en tant qu'elle appartient à la partie *KZLP*, & la vîteſſe *RZ* en tant qu'elle appartient à la partie *CDZK*.

Cette même remarque doit auſſi avoir lieu pour la propoſition démontrée *art.* 158, dans laquelle on n'a point eu égard à l'adhérence des parties.

170. Propos. IV. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*art. 159, *avec cette condition de plus, qu'on ait égard à l'adhérence des parties du Fluide, trouver les endroits où le Fluide doit ſe diviſer.*

1°. On examinera ſi on ne pourroit point trouver une Courbe *euf* (Fig. 54.) dont les ordonnées fuſſent entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes, & qui fût telle que l'Aire $\int dx\,(s - r)$ devînt $= 0$, en faiſant $x = AB$, & n'eût aucune valeur négative plus grande que la valeur d'une Aire conſtante poſitive A, qu'on prendra pour l'expreſſion donnée de la force d'adhérence. Si cela eſt, le Fluide doit ſe mouvoir en formant une maſſe continue.

2°. Si on ne peut trouver la Courbe *euf* qu'on cherche, on cherchera, ce qu'il eſt toujours poſſible de trouver, une Courbe *qmh* (Fig. 60 & 61.) dont les ordonnées *qg*, *mn*, *ph* &c. ſoient entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes du Fluide, & qui ſoit telle que l'Aire $qgplq - qgphmq = A$, & que la différence d'une portion quelconque *gqin* ſur l'Aire correſpondante *gqmn* ne ſoit jamais négative. On cherchera auſſi, ce qu'il eſt toujours poſſible de trouver, une Courbe *boa* dont les ordonnées ſoient entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes du Fluide, & qui ſoit telle que $cabf - cdrbf = -A$, & que l'excès d'une portion quelconque *caos* ſur la portion *cdrs*, ne ſoit jamais une quantité négative plus grande que A. Cela poſé, je dis que les parties qui ſont depuis *c* juſqu'en *f*, doivent ſe mouvoir en ne formant qu'une maſſe continue, ainſi que celles qui ſont depuis *g* juſqu'en *p*. A l'égard des parties qui ſont depuis *f* juſqu'en *g*, on cherchera par la Méthode de l'*art.* 159, leurs mouvemens,

en les regardant comme une masse séparée, dont les parties ne sont nullement adhérentes entr'elles; parce que dans la recherche du mouvement des parties qui sont depuis c jusqu'en f, on a eu égard à la force d'adhérence appliquée à la surface supérieure, & que dans la recherche du mouvement des parties qui sont depuis g jusqu'en p, on a eu égard à la force d'adhérence appliquée à la surface inférieure.

171. PROPOS. V. *Les mêmes choses étant supposées que dans l'*art. 163, *avec cette condition de plus, qu'on ait égard à l'adhérence des particules, trouver les endroits où le Fluide doit se diviser.*

On résoudra ce Problême par le moyen du Problême précédent, comme on a résolu le Problême de l'*art.* 163, par le moyen de l'*art.* 159.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

172. La conservation des forces vives a lieu, même quand on a égard à l'adhérence des parties du Fluide. Car, 1°. quand le Fluide ne se divise pas, on a toujours $\int dv\,dx = 0$, & ainsi la conservation des forces vives a lieu. 2°. Quand le Fluide se divise, la conservation des forces vives a lieu dans la partie moyenne du Fluide, puisqu'on trouve (*art.* 170 & 171.) le mouvement de cette partie en la regardant comme une masse isolée, dont les parties ne sont point adhérentes. A l'égard de la partie supérieure & inférieure de la masse Fluide, com-

me chacune de ces portions ne donne pas $\int dv\,dx = 0$, mais $\int dv\,dx = -A$ pour l'une, & $\int dv\,dx = A$ pour l'autre, la conſervation des forces vives n'a pas lieu pour chacune priſe ſéparément; mais elle a lieu pour les deux priſes enſemble. Car puiſque $\int dv\,dx = -A$ pour l'une, & $= +A$ pour l'autre, il s'enſuit que $\int dv\,dx = 0$ pour les deux priſes enſemble. Donc &c.

SCOLIE.

173. Lorſque les lignes qui repréſentent les vîteſſes ou les forces accélératrices du Fluide ne ſont pas une Courbe continue, les Méthodes que nous venons d'expliquer, peuvent encore être employées avec ſuccès.

Par exemple, dans le cas de l'*art.* 169, il n'y a qu'à regarder les deux lignes OR, QS (Fig. 59.) qui ſont les Courbes des vîteſſes des parties $CDZK$, $PLZK$, comme ne formant qu'une même ligne continue avec la ligne RQ; ou, pour aider l'imagination, il n'y a qu'à ſuppoſer que les vîteſſes des différentes tranches du Fluide $CDLP$ ſoient repréſentées par les ordonnées de la ligne continue $OrQS$, dont la partie rQ eſt une ligne droite ou courbe, ſituée à une diſtance de RQ de tel dégré d'infiniment petit qu'on voudra. Par-là on réduira le Problême au cas de la Courbe continue.

Ainſi dans le cas dont il s'agit, il n'y a qu'à diviſer la Courbe rQ au point Y, qui ſoit tel que l'Aire $YQSM = A$, & diviſer enſuite cette même Courbe au point T, qui ſoit tel

tel que $trOX = A$; ou, ce qui revient au même, diviſer la ligne RQ au point y, qui ſoit tel que $yQSM = A$, & diviſer cette même ligne au point t, qui ſoit tel que $RtXO = A$; Zy ſera la vîteſſe de la partie inférieure $ZLPK$, & Zt celle de la partie ſupérieure $ZDCK$.

II.

174. Pour peu qu'on ait fait d'attention à la maniere dont nous avons réſolu les Problêmes précédens, on verra qu'en général quelle que ſoit la cauſe de l'adhérence des parties, toute la difficulté ſe réduit à trouver les endroits où le Fluide ſe ſépare, lorſque toutes ſes tranches ſont animées par des forces accélératrices dv, telles que $\int dv\,dx$ ſoit $= 0$ quand $x = AB$, & ait quelque valeur négative plus grande que la force d'adhérence des parties.

Suppoſons donc que l'adhérence mutuelle des particules provienne de leurs aſpérités, & que la force néceſſaire pour les ſéparer, ſoit appellée B comme dans l'*article* 50; il faudra regarder la vîteſſe dv de chaque tranche comme compoſée d'une vîteſſe dV qu'elle doit conſerver, & d'une vîteſſe dv qu'elle doit perdre. Donc les tranches animées des vîteſſes dv doivent être en équilibre, & par conſéquent il faut (*article* 52.) que $\int dv\,dx$ ſoit $= 0$, & n'ait aucune valeur négative $> B$. De plus, il faut que toutes les valeurs de $\int dv\,dx$ répondantes aux endroits où le Fluide ſe ſépare, ſoient des quantités négatives préciſément égales à B. Car ſi elles étoient moin-

dres, le Fluide ne ſe ſépareroit pas dans ces endroits-là, ce qui eſt contre l'hypothèſe; & ſi elles étoient plus grandes, les tranches du Fluide animées des vîteſſes dv ne ſeroient pas en équilibre (*article* 52.) ce qui eſt encore contre l'hypothèſe.

De-là il s'enſuit que la ſolution du Problême dont il s'agit ici, ſera préciſément la même que celle du Problême de l'*art.* 159, où nous avons ſuppoſé que l'adhérence des particules vînt d'une force active: il n'y a qu'à mettre ſimplement B à la place de A dans l'*art.* 159, pour avoir la ſolution que nous cherchons.

III.

175. Si l'adhérence des parties vient tout-à-la-fois d'une force active & paſſive, il eſt clair par tout ce que nous avons dit ci-deſſus ſur les deux premieres hypothèſes, que les Problêmes ne ſeront pas plus difficiles; & que pour en avoir la ſolution, il faut ſimplement ſubſtituer $B + A$, au lieu de A dans l'*art.* 159.

CHAPITRE III.

Remarques ſur les Théories que Meſſieurs Maclaurin *&* Jean Bernoulli *ont données du mouvement des Fluides.*

Abrégé de la Théorie de M. Maclaurin.

176. LA Théorie de M. *Maclaurin*, expoſée dans ſon Traité des Fluxions, Liv. I, Chap. 12, *article* 137 *& ſuivans*, n'eſt, comme il le dit lui-même, qu'une extenſion de la Théorie de M. *Newton*.

Il ſuppoſe d'abord que l'eau ſorte d'un Cylindre *ABCD* (Fig. 62.) toujours plein à la même hauteur : il appelle V la vîteſſe avec laquelle la ſurface AB ſe meut, X celle avec laquelle l'eau ſort par EF, & ſuppoſe que le poids total $AB \cdot AC \cdot g$, de l'eau contenue dans le Cylindre, ſoit diviſé en trois parties, dont l'une qu'il nomme $AB \times AC \cdot f$ produiſe l'accélération de V, la ſeconde produiſe l'excès de X ſur V, la troiſiéme enfin ſerve à preſſer le fond du vaſe. La ſomme de ces deux dernieres forces eſt par conſéquent $AB \cdot AC \cdot (g - f)$; & M. *Maclaurin* ſuppoſe que $\frac{AB \cdot AC \cdot (g-f)}{r}$ repréſente la premiere de ces deux forces, r étant un nombre conſtant qu'il détermine dans la ſuite. Cette force engendre dans un petit temps dt la vîteſſe $X - V$ dans une maſſe qui ſort pen-

dant ce temps dt, & qui eſt proportionnelle à $EF.X.dt$; on a donc par le Principe général des forces accélératrices $AB.AC.(g-f)\,dt = r.EF.X.dt.(X-V)$, ou (à cauſe que $X:V::AB:EF$) $r.EF.(AB-EF).XX = AB^2.AC.(g-f)$. Donc ſi on fait $2r.EF.KC \times (AB-EF) = AB^2.AC$, & $2g.KC = AA$; on aura $AA.(g-f) = gXX$, & $AA:AA-XX::g:f::gdt:fdt::gdt:dV::AB\times gdt:dX\times EF$: donc

$dt = \frac{AA.EF.dX}{g.AB(AA-XX)}$ Equation intégrable par Logarithmes, que M. *Maclaurin* conſtruit par le moyen de l'hyperbole, & qui fait connoître la vîteſſe de l'eau qui ſort à chaque inſtant.

177. Lorſque le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein à la même hauteur, on a toujours $g:f::AA:AA-XX$. De plus, comme V & X, & leurs différences, ſont toujours dans la raiſon conſtante de EF à AB, on a toujours $VdV:XdX::EF^2:AB^2$; donc $gVdV:fXdX::EF^2\times AA:AB^2\times(AA-XX)$; mais en nommant la variable AC, H, on a $VdV = -fdH$, & ſuppoſant $XX = 2g.D$, on a $XdX = gdD$; donc $-dH:dD::EF^2\times AA:AB^2\times(AA-XX)$; donc mettant pour AA, AC, XX, leurs valeurs, & ſuppoſant $e.EF = 2r\times(AB-EF)$, on aura l'Equation

$$HdH.AB^2 = (eDdH - HdD)\times EF^2.$$

dont l'intégrale (en prenant Ca pour la premiere valeur de H, c'eſt-à-dire, pour la hauteur du Fluide lorſqu'il

commence à ſe mouvoir) eſt $(1-e)H^{-e}D(EF^2) = (Ca^{-e+1} - H^{-e+1}).AB^2$.

178. Il n'y a d'inconnue dans cette Equation que la quantité e. Or e dépend (*article* 177.) de la quantité r qu'il faut préſentement trouver. Cette quantité r, comme nous l'avons vû (*art.* 176.) eſt le rapport de la force $AB.AC.(g-f)$ à la force qui accélere le Fluide ſortant par EF, & qui produit dans ce Fluide la vîteſſe $X-V$. M. *Maclaurin* ſuppoſe que ce rapport eſt conſtant : il ajoute que les Auteurs varient au ſujet de la valeur de r. Les uns ſuppoſent, dit-il, que la force qui accélere l'eau qui ſort eſt à celle qui preſſe le fond du vaſe, comme $AB-EF$ eſt à EF; c'eſt-à-dire, que ſuivant ces Auteurs $AB.AC.(g-f) : AB.AC.(g-f).(r-1) :: EF : AB-EF$; d'où l'on tire $r = \frac{AB}{EF}$, & par conſéquent $e = \frac{2AB.(AB-EF)}{EF^2}$.

D'autres Auteurs ſuppoſent avec M. *Newton*, que l'eau qui ſort, forme en tombant, une eſpéce de cataracte $AMEFNB$, dont la premiere ſurface AB a une vîteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant librement d'une certaine hauteur IH, & dont une tranche quelconque MN a une vîteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant librement de la hauteur IR. D'où ces Auteurs concluent que la cataracte eſt une Courbe hyperbolique, dans laquelle $MN \times \sqrt{IM}$ eſt toujours une quantité conſtante. Or ſuppoſant que les deux forces

dont l'une accélere l'eau qui ſort, l'autre agit ſur le fond du vaſe, ſoient entr'elles comme le ſolide de la cataracte au reſte du Cylindre, on trouve que $AB.AC.(g-f)$: $AB.AC.(g-f).(r-1) :: 2EF : AB-EF$. Donc $2EF.r = AB+EF$, & $e = \frac{AB^2-EF^2}{EF^2}$; c'eſt à cette valeur que M. *Maclaurin* s'arrête.

179. M. *Maclaurin* ſuppoſe enſuite que deux vaſes *abdc*, *ABDC* (Fig. 63.) ſoient joints l'un avec l'autre; & pour trouver les vîteſſes en *AB* & *EF*, il nomme *EF*, *O*, *ab*, *C*, *AB*, *B*, *X* la vîteſſe de l'eau en *EF*, *V* ſa vîteſſe dans le vaſe *ABCD*, *Z* ſa vîteſſe dans le vaſe *abcd*, *F*, *f*, *p*, les forces accélératrices qui engendrent ces vîteſſes, enfin *AB*, *b*, & *ac*, *c*: par conſéquent il trouve, ſuivant ſes Principes, $AB.AC.(g-f) = r.O.X \times (X-V) = \frac{XX.(BB-OO)}{2B}$: de même $AL.AB(g-p) = \frac{(CC-BB).XX.OO}{2C.BB}$; c'eſt, ſelon M. *Maclaurin*, l'expreſſion de la force qui engendre à la ſurface *AB* la vîteſſe $V-Z$. Il diminue enſuite cette force dans la raiſon de *AB* à *ab* ou de *B* à *C*, ce qui donne $\frac{(CC-BB).XX.OO}{2B.CC}$. De-là il tire l'Equation $[B.b.(g-f)+B.c(g-p)] \times 2BCC = XX[CC.(BB-OO)+(CC-bB).OO]$; & faiſant $AA.(CC-OO) = 2g.(b+c).CC$, il trouve $AA.[b.(g-f)+c.(g-p)] = XX.2g.(b+c)$. Donc $AA : AA-XX :: gb+gc : fb+pc :: gbdt+$

$gcdt : fbdt + pcdt :: gbdt + gcdt : bdV + cdZ ::$
$gbdt + gcdt : \frac{bdX.O.C + C.c.OdX}{B.C}$. donc $dt = AAdX \times$
$\frac{(Cb + Bc).O}{B.C.(gb + gc).(AA - XX)}$.

180. Quand le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein, l'Auteur trouve en ce cas la vîteſſe de l'eau par une Méthode ſemblable à celle que nous avons expoſée dans l'*art.* 177.

181. Si les deux vaſes ne communiquoient enſemble que par une petite ouverture ef, que M. *Maclaurin* appelle o, il faudroit mettre $XX.\frac{(CC - oo).OO.B}{2CC.oo}$, au lieu de $\frac{XX.(CC - BB).OO}{2B.CC}$ dans le ſecond membre de l'Equation précédente $B.b(g - f)$ &c. parce que $O.X \times (V - Z) \times \frac{ab + AB}{2AB}$ devient alors $\frac{O.X.(V - Z)}{2.ef}.(ab + ef) =$ $\frac{(CC - oo).XX.OO}{2Coo}$, & qu'il faut diminuer cette quantité dans la raiſon de CD à ab, ou de B à C.

Quand le vaſe eſt compoſé de pluſieurs Cylindres qui communiquent entr'eux, alors en ſuivant la Méthode donnée par l'Auteur pour le cas de deux vaſes, on trouvera $B.b(g - f) + B.c(g - f)$ &c. $= XX \times$ $\left(\frac{(BB - OO).OOB}{2BB.OO} + \frac{(CC - BB).OOB}{2CC.BB} + \frac{(DD - CC).OOB}{2DD.CC} + \text{&c.}\right)$ $= XX.\frac{(SS - OO).B}{2SS}$, en nommant S la ſection ſupérieure

du vaſe, ou la largeur de la premiere ſurface du Fluide. Soit $(SS - OO).AA = 2g.(b + c + \&c.).SS = 2gH.SS$; on aura $AA : AA - XX :: g(b + c + \&c.) : fb + pc + \&c$; ou $AA : AA - XX :: H \times g : F(\frac{bO}{B} + \frac{cO}{C} + \&c.)$. Donc faiſant $K = \frac{bO}{B} + \frac{cO}{C} + \&c.)$ on aura $XX.(SS - OO) = 2SS.(H.g - K.F)$; ou $g.D.(SS - OO) = [H.g - K.F]SS$. Mais $Fdt = dX$; $XdX = gdD$; $= X.O.dt = -SdH$: donc $g.DdH(SS - OO) = SSgHdH + KSgOdD$.

Si on examine l'Equation que nous avons donnée ci-deſſus *art.* 105, pour le mouvement d'un Fluide ſortant d'un vaſe qui n'eſt pas entretenu toujours plein à la même hauteur, on trouvera qu'elle s'accorde parfaitement avec celle de M. *Maclaurin :* pour s'en convaincre, il n'y a qu'à ſuppoſer dans cette Equation de l'*art.* 105, m égale à K. Il n'eſt plus queſtion que d'examiner ſi la Théorie de cet illuſtre Auteur eſt entiérement ſatisfaiſante, quoiqu'il en réſulte des ſolutions exactes.

Remarques ſur cette Théorie.

182. Il me ſemble qu'il y a pluſieurs difficultés à faire contre cette Théorie de M. *Maclaurin.* 1°. Il y a, comme nous l'avons fait voir ci-deſſus *art.* 113, de l'inconvénient à ſuppoſer que l'eau qui ſort par EF acquerre *tout-à-la-fois* la vîteſſe $X - V$, c'eſt-à-dire, qu'elle paſſe ſubitement de la vîteſſe V à la vîteſſe X. L'Auteur reconnoît lui-même cet inconvénient dans l'*art.* 546 de ſon Ouvrage.

Ouvrage. 2°. M. *Maclaurin* diviſe le poids total du Fluide en trois parties, dont l'une eſt deſtinée à accélérer le Fluide au-dedans du vaſe, l'autre l'accélére à l'ouverture, la troiſiéme enfin preſſe le fond du vaſe; c'eſt la même choſe que s'il eût partagé le poids total du Fluide en deux parties, dont l'une fût ſoutenue par la réſiſtance du fond, & l'autre produisît le mouvement du Fluide. Il eſt aiſé de voir par l'*art.* 150, que cette ſuppoſition eſt vraie, & que la ſomme des forces motrices des particules du Fluide, plus la preſſion dont le fond du vaſe cylindrique eſt chargé, eſt égale au poids total du Fluide; mais cette ſuppoſition n'eſt pas, ce me ſemble, aſſez claire par elle-même pour n'avoir pas beſoin de preuve, ſur-tout dans le cas où l'ouverture du vaſe n'eſt pas infiniment petite. 3°. M. *Maclaurin* ſuppoſe, ſans le démontrer, que la force qui accélére l'eau à la ſortie du vaſe, eſt toujours en raiſon conſtante avec la force qui preſſe le fond; ce qui n'eſt prouvé, ce me ſemble, ni pour le cas où le vaſe ſe déſemplit, ni même pour celui où il reſte toujours plein, parce que dans ce dernier cas même l'eau ne ſort pas avec une vîteſſe uniforme, au moins durant un certain temps. 4°. Parmi les différentes valeurs aſſignées à ce rapport, celle pour laquelle M. *Maclaurin* paroît ſe déterminer, eſt celle qui réſulte de la ſuppoſition que l'eau forme une cataracte en deſcendant. Mais en premier lieu, l'exiſtence de cette cataracte n'a jamais été bien prouvée, & M. *Jean Bernoulli* en fait même voir aſſez bien l'impoſſibilité dans ſon Hy-

draulique. * En ſecond lieu, M. *Maclaurin* ſemble lui-même ne pas admettre la cataracte. Car, puiſqu'il ſuppoſe qu'une partie du poids du Fluide eſt employée à produire la vîteſſe *V*, & l'autre à produire la vîteſſe *X*, il ſuppoſe apparemment auſſi que toutes les parties du Fluide ſe meuvent au-dedans du vaſe avec la même vîteſſe qu'à la ſurface, autrement il faudroit encore avoir égard aux différentes parties du poids, qui produiroient l'accélération des tranches du Fluide au-dedans du vaſe. En troiſiéme lieu, quand on accorderoit que la force qui preſſe le fond du vaſe fût égale à ce qui reſte du poids du Fluide, après en avoir ôté le poids du Fluide contenu en la cataracte, on ne ſeroit pas encore en droit d'en conclure que le poids de la cataracte fût la force qui accélérât le Fluide à l'ouverture *EF*. 1°. Parce que ce poids eſt plutôt la force qui accélére l'eau dans toute la cataracte, que celle qui l'accélére ſimplement à l'ouverture. 2°. Parce que l'eau contenue dans la cataracte étant en mouvement, & l'eau qui ſort auſſi en mouvement, on ne peut ſuppoſer que la cataracte agiſſe ſur celle-ci par toute la force de ſon poids.

Ces remarques, auxquelles on pourroit encore en ajouter d'autres, ſuffiront, je crois, aux Géométres, pour douter que la Théorie de M. *Maclaurin* ſoit revêtue de toute l'évidence & la clarté néceſſaire, quoique cette Théorie s'accorde, pour les réſultats qu'elle donne, avec ceux que nous avons trouvés par la nôtre.

* Voyez l'*Hydraulique* de M. *Jean Bernoulli*, imprimée en 1743, à la fin du Recueil de ſes Œuvres, art. LX.

Théorie de M. Jean Bernoulli, *ou extrait de ſon Hydraulique.*

183. La premiere partie de l'Hydraulique de M. *Bernoulli* traite du mouvement d'un Fluide dans un vaſe Cylindrique vertical, auquel eſt adapté un Tuyau horizontal. M. *Bernoulli* obſerve d'abord, que quand le Fluide paſſe du vaſe dans le Tuyau, ſa vîteſſe augmente à la vérité, mais qu'elle ne peut augmenter bruſquement; qu'ainſi il eſt néceſſaire qu'avant de parvenir à l'orifice GF, (Fig. 64.) elle s'accélere au moins dans un petit eſpace HG, en formant une eſpéce de goufre ou cataracte $IMFGH$. Pour déterminer la force qui produit l'accélération du Fluide $IMFGH$, M. *Bernoulli* nomme $HL, t, LM, y, Ll, dt, AE, h; g$, la peſanteur; $HA, a, BC, m; v$ la vîteſſe de l'eau dans le vaſe GC, & par conſéquent $\frac{mv}{h}$ ſa vîteſſe dans le Tube, & $\frac{mv}{y}$ la vîteſſe de LM; en appellant u cette derniere vîteſſe, il trouve que $yudu$ eſt l'expreſſion de la force motrice de LM; or ſi cette force étoit cenſée venir d'une puiſſance appliquée à la premiere ſurface AE, la puiſſance appliquée en AE, ſeroit par les régles de l'Hydroſtatique, égale à $yudu \times \frac{AE}{y} = hudu$. Donc ſi on imagine que l'accélération de toutes les tranches LM du goufre vienne d'une force appliquée en AE, cette force ſera $\int hudu$ ou $\left(\frac{hh - mm}{2h}\right) vv$.

M. *Bernoulli* ſuppoſe cette force égale au poids $ghα$ du Fluide contenu dans le vaſe, & il a par ce moyen $\left(\frac{hh-mm}{2h}\right) vv = ghα$. Equation de la vîteſſe d'un Fluide qui ſort d'un vaſe Cylindrique entretenu toujours plein, lorſque cette vîteſſe eſt parvenue à l'état d'uniformité.

184. Pour déterminer en général la vîteſſe, lorſqu'elle n'eſt pas encore parvenue à l'état d'uniformité, M. *Bernoulli* appelle b la longueur du Tube FC, x la longueur de l'eſpace que l'eau a parcourue dans le Tube; il remarque que $\frac{mbvdv}{dx}$ eſt la force qui accélere le Fluide dans le Tube, & que cette force transférée en AE eſt $\frac{hbvdv}{dx}$, & que celle qui accélere le Fluide dans le vaſe, eſt $\frac{mavdv}{dx}$. Il ajoute enſuite ces deux forces avec celle qui forme la cataracte, & qu'il a trouvée $= \frac{hh-mm}{2h} vv$, & il fait la ſomme de ces trois forces égale au poids $ghα$ du Fluide contenu dans le vaſe; ce qui produit une Equation d'où il tire en intégrant, la valeur de v.

M. *Bernoulli* ſe ſert d'une Méthode analogue pour trouver le mouvement d'un Fluide qui coule d'un Tuyau cylindrique vertical dans pluſieurs Tuyaux horizontaux, adaptés les uns aux autres; augmentant enſuite le nombre des Tuyaux horizontaux, & diminuant leur longueur à l'infini, il détermine les Loix du mouvement d'un Fluide

qui ſort d'un vaſe cylindrique vertical par un Tuyau horizontal de figure quelconque.

185. M. *Bernoulli* auroit pû déduire de-là les Loix du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de figure quelconque ſitué verticalement, puiſqu'un tel vaſe peut être regardé comme compoſé d'une infinité de Tuyaux cylindriques d'une hauteur infiniment petite : mais dans le deſſein ſans doute de montrer l'étendue de ſes Principes, il ſe propoſe dans la ſeconde Partie, de réſoudre immédiatement le Problême en général, c'eſt-à-dire, de trouver la vîteſſe de l'eau qui ſort d'un vaſe de figure quelconque, & voici à peu près comme il s'y prend. Soit u la vîteſſe d'une tranche quelconque, $u + du$ la vîteſſe que la tranche inférieure & infiniment proche a dans le même inſtant, $u + du + \mathrm{d}u$ la vîteſſe de la premiere de ces deux tranches, lorſqu'elle aura parcouru le petit eſpace dt pour arriver à la place de la tranche qui la précédoit; la force motrice de cette tranche ſera $yu \times (du + \mathrm{d}u)$ & cette force transférée à la ſurface ſera $hu \times (du + \mathrm{d}u)$; or ſuppoſant que v ſoit la vîteſſe de l'eau qui paſſe par l'ouverture dans un inſtant quelconque, $v + dv$ ſa vîteſſe dans l'inſtant ſuivant, & dx le petit eſpace que parcourt le Fluide en ſortant du vaſe, on aura $dv : \mathrm{d}u :: v : u :: dx : dt$; & par conſéquent $hu(du + \mathrm{d}u) = hudu + \frac{hvdv \cdot dt^2}{dx^2}$, dont l'intégrale eſt $\frac{hh - mm}{2h} \times vv + \frac{hvdv}{dx} \int \frac{mdt}{y}$, en prenant dx conſtant, & mettant pour $\frac{dt}{dx}$ ſa valeur $\frac{m}{y}$,

M. *Bernoulli* ſuppoſe cette quantité égale à $ghα$, qui n'eſt autre choſe que la ſomme des poids de chaque tranche transférés à la ſurface ; ce qui lui donne l'Equation générale du mouvement d'un Fluide ſortant d'un vaſe qu'on entretient toujours plein : équation d'où il tire enſuite la vîteſſe du Fluide quand le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein, en faiſant ſeulement a & $\int \frac{m\,dt}{y}$ variables.

186. M. *Bernoulli* appelle la quantité $\frac{hh-mm}{2h} \times v\,v$, *force Hydroſtatique*, & la quantité $\frac{h\,v\,dv}{dx}\int \frac{m\,dt}{y}$, *force Hydraulique* du Fluide.

Pour déterminer la preſſion en un endroit quelconque KZ, (Fig. 32.) M. *Bernoulli* appelle π cette preſſion, & il fait la ſomme des forces Hydroſtatiques & Hydrauliques depuis KZ juſqu'en PL, transférées en KZ, égale à la preſſion π, plus à la ſomme des peſanteurs depuis KZ juſqu'en PL, transférées en KZ; par le moyen de cette Equation, il détermine la quantité π.

Remarques ſur cette Théorie.

187. On voit par l'expoſé que nous venons de faire, que le Principe général de M. *Bernoulli* conſiſte à ſubſtituer à la ſomme des poids de toutes les Couches une ſeule force qui n'agiſſe qu'à la ſurface du Fluide, de ſubſtituer de même à la ſomme des forces motrices des particules du Fluide, une ſeule force qui n'agiſſe qu'à la ſurface, & de faire enſuite ces deux forces égales entr'elles.

On ne peut disconvenir que cette Théorie ne soit ingénieuse, & les résultats qu'elle donne, s'accordent d'ailleurs parfaitement avec ceux qui se tirent de nos Principes. Il me semble cependant que dans plusieurs points elle auroit besoin de démonstration.

Le premier Problême que résout M. *Bernoulli*, consiste à trouver la vîtesse d'un Fluide qui se meut dans un vase auquel est adapté un Tuyau horizontal, le vase étant toujours entretenu plein à la même hauteur, & la vîtesse étant supposée parvenue à l'état d'uniformité. M. *Bernoulli* prétend qu'alors la pesanteur du Fluide contenu dans le vase, est uniquement employée à accélérer le Fluide dans la cataracte *IMFGH*; d'où il conclut que $ghα$ doit être $= \frac{hh - mm}{2h} \times vv$.

188. Sur quoi, je remarquerai d'abord en passant, que M. *Bernoulli* n'auroit pas dû supposer sans démonstration, que la vîtesse d'un Fluide qui sort d'un vase qu'on entretient toujours plein à la même hauteur, parvient enfin à l'état d'uniformité : ce que M. *Bernoulli* ne prouve que dans la suite.

En second lieu, il me semble qu'il n'auroit pas dû avancer, sans le démontrer, que la force qui pousse le Fluide dans la cataracte, est égale au poids du Fluide contenu dans le vase, lorsque la vîtesse est parvenue à être uniforme.

Car, 1°. il seroit assez naturel de penser que le Fluide, obligé de passer dans un espace plus étroit pour former

la cataracte, devroit s'accélérer dans cet eſpace, indépendamment de ſa peſanteur, par cette ſeule raiſon que l'eſpace par lequel il doit paſſer eſt plus étroit : qu'ainſi le poids du Fluide ne doit pas être regardé comme la ſeule force qui accélere le Fluide dans la cataracte, ni par conſéquent être égalé à cette force. 2°. Quand on accorderoit que l'accélération du Fluide eſt cauſée par ſa peſanteur, pourquoi, dira-t-on, ſuppoſer cette force préciſément égale au poids du Fluide ? Ne pourroit-on pas croire que le vaſe doit ſoutenir une partie du poids du Fluide, & qu'ainſi on ne ſauroit ſuppoſer le poids total égal à la force qui forme la cataracte ?

Cette derniere difficulté eſt même d'autant plus naturelle, que M. *Bernoulli* a été obligé dans l'*art.* XXVII *& ſuiv.* de ſon Hydraulique, d'employer une Méthode aſſez compliquée pour déterminer la preſſion du Fluide contre le fond du vaſe. Auſſi la valeur de la preſſion qu'il trouve par cette Méthode dans l'*art.* XXX, ne me paroît-elle pas exacte : car quand l'ouverture eſt fort petite, il faudroit, ſuivant la formule de M. *Bernoulli*, que cette force fût égale au double du poids du Fluide, au lieu que je crois avoir prouvé dans l'*art.* 150, que cette force n'eſt alors égale qu'au poids du Fluide.

189. Une raiſon aſſez forte, ce me ſemble, de douter que la Méthode de M. *Bernoulli* ſoit aſſez lumineuſe & aſſez directe, c'eſt que ſi le Tuyau cylindrique adapté au vaſe étoit vertical comme le vaſe, & que la vîteſſe du Fluide fût parvenue à l'état d'uniformité, alors il faudroit ſuppoſer,

ſuppoſer, comme il le dit lui-même, que la force qui produit la cataracte, fût égale à celle qu'on auroit en transférant à la premiere ſurface, la peſanteur du Fluide contenu dans le Tuyau & dans le vaſe. Or, comment concevoir que la peſanteur du Fluide contenu dans le Tuyau inférieur à la cataracte, puiſſe concourir avec celle du vaſe, à produire l'accélération du Fluide qui forme la cataracte? Car, comme on fait ici abſtraction de l'adhérence des parties, le poids du Fluide inférieur ne peut agir ſur celui du Fluide ſupérieur.

Lorſque M. *Bernoulli* donne l'Equation générale des vîteſſes d'un Fluide qui ſort d'un vaſe Cylindrique qu'on entretient toujours plein, il ſemble donner cette Equation pour exactement vraie; cependant il eſt aiſé de voir par ce que nous avons dit *art.* 112, que cette Equation n'eſt qu'une Equation approchée, dans laquelle on néglige une partie de la force qui accélere dans la cataracte, qu'on regarde comme nulle par rapport au reſte.

190. A l'égard de la Méthode de M. *Bernoulli* pour trouver la vîteſſe d'un Fluide qui coule par un vaſe de figure quelconque, j'avoue qu'elle me paroît auſſi ſuſceptible de quelques difficultés. Car ſi la force motrice de chaque tranche n'eſt pas égale à ſon poids, pourquoi la ſomme des forces motrices transférées à la premiere ſurface *AE* (Fig. 64.) eſt-elle égale au poids transféré à cette ſurface? On ne pourroit en rendre raiſon, ce me ſemble, dans les Principes de M. *Bernoulli*, qu'en imaginant le poids de toutes les tranches comme réuni à la

premiere ſurface *AE*, & comme produiſant de-là, pour ainſi dire, l'accélération des différentes tranches. Mais, 1°. ne pourroit-on pas croire que la figure du vaſe contribueroit en partie à l'accélération des couches du Fluide, comme nous l'avons déja obſervé? 2°. Ce Principe d'Hydroſtatique, que ſi la ſurface d'une liqueur eſt preſſée également en tous ſes points, la preſſion ſe diſtribue aux autres couches en raiſon de leur largeur, doit-il être employé ſans démonſtration, lorſqu'il s'agit d'un Fluide en mouvement, dont les parties inférieures ſemblent ſe dérober à l'effort des ſupérieures? 3°. En accordant même ce Principe & l'uſage qu'on en fait ici, il paroît que la force accélératrice devroit être la même dans toutes les tranches, puiſque (*art.* 14.) la preſſion de la ſurface doit ſe diſtribuer également à tous leurs points. 4°. Pourquoi ſuppoſer la force motrice préciſément égale au poids? Ne ſeroit-il pas naturel de penſer que les parois du vaſe ſoutiennent au moins une partie de l'effort? En effet, dira-t-on peut-être, ſi toute la peſanteur du Fluide eſt employée à l'accélération, comment ſe pourra-t-il faire que le Fluide exerce en même-temps une action ſur le vaſe; action dont l'exiſtence ne peut être conteſtée, puiſque ſi le vaſe n'étoit pas immobile, il faudroit une certaine force pour le ſoutenir? 5°. De plus, ſi on imagine toute la peſanteur du Fluide réunie à la ſurface, il eſt naturel de penſer qu'elle doit produire une accélération dans la vîteſſe de toutes les tranches : il n'eſt pas néceſſaire cependant que la vîteſſe de toutes les tranches s'accélére,

il ſuffit que le mouvement de la partie inférieure du Fluide augmente (*art.* 103.), & la figure du vaſe peut être telle que la partie ſupérieure ſoit retardée, au lieu d'être accélerée : elle le ſera même néceſſairement (*art.* 98.) ſi le Fluide eſt ſuppoſé ſans peſanteur. 6°. Dans le cas où l'on fait abſtraction de la peſanteur du Fluide, je vois bien qu'on en peut trouver le mouvement par la Méthode de M. *Bernoulli*, en faiſant $g = 0$ dans ſes formules: mais il me paroît aſſez difficile d'y appliquer directement ſes Principes.

Toutes ces difficultés, je l'avoue, n'attaquent point le fond des Principes de M. *Bernoulli :* on ne peut douter qu'ils ne ſoient très-vrais, puiſqu'ils l'ont conduit à la véritable ſolution du Problême qu'il cherchoit : cependant ne pourroit-on pas déduire les Loix du mouvement des Fluides d'une Théorie qui portât plus de lumiere dans l'eſprit? Il me ſemble que les difficultés que je viens de propoſer, n'ont pas lieu dans la Méthode que j'ai ſuivie.

191. J'ignore pourquoi M. *Bernoulli*, dans ſa ſolution générale, appelle la quantité $\frac{hh - mm}{2h} vv$ *force Hydroſtatique.* Cette force, ſelon lui, provient de l'action mutuelle des couches qui ſe pouſſent & qui ſe réſiſtent ; elle ne conſiſte que dans un ſimple effort, ou preſſion, exercée dans un inſtant indiviſible. Il me paroît difficile de concevoir comment $\frac{hh - mm}{2h} \times vv$ eſt une force ſimplement Hydroſtatique : il me ſemble, au contraire, que nous

avons vû assez clairement ci-dessus, que $hu.(du+\mathrm{d}u)$ représentoit la force accélératrice de chaque tranche transférée à la surface, & que l'intégrale de cette quantité étoit $\frac{hh-mm}{2h}\times vv+\frac{hvdv}{dx}\int\frac{mdt}{y}$, qui par conséquent ne représente point une force en partie Hydrostatique & en partie Hydraulique, mais une force simplement Hydraulique, pour me servir des termes de M. *Bernoulli*.

Si par cette distinction de *puissance Hydrostatique* & *puissance Hydraulique*, M. *Bernoulli* avoit voulu dire, que le poids du Fluide devoit se distribuer en deux forces, dont l'une produisit l'accélération & l'autre fut détruite, en ce cas il se seroit trompé dans la détermination de ces forces; la vraie somme des forces Hydrostatiques doit être $\int dx.\left(\frac{pdx}{v}-dv\right)$, & cette somme doit être égale à zero, ce qui produit l'Equation $gha=\frac{hh-mm}{2h}vv+\frac{hvdv}{dx}\int\frac{mdt}{y}$. L'inconvénient de cette dénomination de *force Hydrostatique* & *force Hydraulique* se fait sentir encore mieux, ce me semble, lorsque l'Auteur se propose de trouver la pression d'un Fluide en mouvement, contre les parois d'un vase. Il paroît en effet, que pour déterminer cette pression dans ses Principes, il n'y auroit qu'à la supposer égale à la force qu'il a nommée *force Hydrostatique;* mais on n'auroit par-là qu'une détermination fautive de la pression. Aussi, outre cette force Hydrostatique, M. *Bernoulli* imagine encore une force qu'il ap-

pelle *immatérielle*, & qui agit, dit-il, entre chaque tranche, pour pouſſer l'une en avant & l'autre en arriere; ſuppoſant enſuite la ſomme des forces, tant *Hydroſtatiques*, qu'*Hydrauliques*, pour une tranche quelconque, égale à la peſanteur du Fluide inférieur transférée à cette ſurface, plus à cette force immatérielle, il vient à bout de la déterminer par ce moyen. Mais après les difficultés que nous venons de faire contre la Méthode générale, n'a-t-on rien à déſirer de plus direct & de plus lumineux ſur cette détermination?

CHAPITRE IV.

Du mouvement des Fluides élaſtiques.

Premiere Hypothèſe.

192. LEs Fluides dont nous conſidérons le mouvement dans les Problêmes ſuivans, ſeront toujours ſuppoſés également denſes dans toutes leurs parties, & quand nous imaginerons qu'ils ſe dilatent ou ſe compriment, nous ſuppoſerons toujours que toutes leurs parties ſe dilatent & ſe compriment également.

COROLLAIRE I.

193. Donc ſi un Fluide élaſtique $DCPL$ (Fig. 65.) renfermé dans un vaſe dont le fond DC eſt immobile, eſt ſuppoſé ſe dilater ou ſe condenſer de la quantité $PLlp$

infiniment petite, la vîteſſe de chaque tranche KZ ſera en raiſon compoſée de l'inverſe de KZ, & de la directe de l'Aire $CDZK$. Car puiſque toutes les parties ſont ſuppoſées ſe dilater ou ſe condenſer également, & que la partie $DCPL$ eſt changée en $DCpl$, la partie $DCKZ$ ſera changée en $DCkz$, & l'on aura $DCkz$ à $DCKZ$:: $DCpl$ à $DCPL$. Donc $\frac{Oo}{Bb} = \frac{PL.CDZK}{KZ.CDLP}$; mais $\frac{Oo}{Bb}$ exprime le rapport de la vîteſſe de KZ à celle de PL, puiſque dans le temps que PL vient en pl, KZ vient en kz. Donc &c.

COROL. II.

194. Donc ſi on appelle KZ, y, PL, K, AO, x, $O\omega = dx$ (en ſuppoſant $KZ\zeta x = PLlp$) l'Aire $CDLP$, A; AB, q; u la vîteſſe de PL, v celle de KZ: on aura, 1°. $y\,dx = K\,dq$; 2°. $Oo = \frac{dx.\int y dx}{A}$; 3°. $v = \frac{u.K.\int y dx}{A.y}$; 4°. $KZ - kz = (KZ - x\zeta) \times \frac{Oo}{O\omega} = \frac{dy.\int y dx}{A}$. 5°. Si on prend la différence de v en obſervant de faire la différence de $\int y\,dx =$ à $KZ\zeta k$, c'eſt-à-dire, à $\frac{ydx.\int y dx}{A}$, & celle de $y =$ à $\frac{dy.\int y dx}{A}$, on trouvera

$$\int dx\,dv = d\left(\frac{uK}{A}\right).\int \frac{dx \int y dx}{y} + \frac{uK\,K\,dq}{AA} \times \frac{(\int y dx)^2}{2yy}.$$

Donc ſi on ſuppoſe que $\int \frac{dx \int y dx}{y} = M$, lorſque $x = q$,

il eſt évident que, lorſque x ſera $= q$, on aura

$$\int dx\,dv = d\left(\frac{u.K}{A}\right).M + \frac{uKdq}{2K}.$$

SCOLIE.

195. On pourroit encore, par une Méthode analogue à celle de l'*art.* 97, connoître la valeur de $\int dx\,dv$: car on trouveroit, en s'y prenant bien, la même expreſſion que nous venons de donner : je ne crois pas qu'il ſoit néceſſaire d'entrer dans un plus grand détail là-deſſus.

COROL. III.

196. Si le Fluide ſe condenſoit, au lieu qu'on a ſuppoſé qu'il ſe dilatoit, on trouveroit encore pour $\int dx\,dv$ la même valeur que dans l'*art.* 194 : on remarquera ſeulement, qu'alors $AB\,(q)$ diminue, tandis que u augmente, & qu'ainſi $K\,dq$ eſt alors une quantité négative.

Seconde Hypothèſe.

197. Pour trouver les Loix du mouvement des Fluides élaſtiques, nous ſuppoſerons que toutes les tranches d'une maſſe Fluide donnée ſont animées par une force accélératrice φ, qui dans un même inſtant eſt la même pour toutes ces tranches, & qui varie d'un inſtant à l'autre.

Pour déterminer cette quantité φ, nous ſuppoſerons que π repréſente la force qu'il faudroit appliquer en PL pour retenir le Fluide qui tend à ſe dilater ſuivant AB,

& δ la denſité du Fluide; il eſt évident que $\varphi . AB . \delta . PL$ doit être $= \pi$, d'où l'on tire $\varphi = \frac{\pi}{PL . AB . \delta}$.

COROLLAIRE.

198. Nous avons vû ci-deſſus (*art.* 68.) qu'en ſuppoſant PL & δ conſtantes, & AB variable, la quantité π reſtoit toujours la même : d'où l'on voit que φ ſera d'autant plus grande que AB ſera plus petite; ou, ce qui eſt la même choſe, que la force accélératrice φ ſera d'autant plus grande, toutes choſes d'ailleurs égales, que la quantité de Fluide ſera moindre. En effet, puiſqu'un Fluide d'élaſticité & de denſité donnée, ſoutient toujours le même poids quelle que ſoit ſa maſſe, il s'enſuit que la vîteſſe avec laquelle ſes parties tendent à ſe mouvoir, doit être d'autant plus grande que ſa maſſe eſt plus petite.

SCOLIE.

199. Au lieu de ſuppoſer la force φ répandue ſur toutes les tranches du Fluide, on pourroit ſuppoſer que la ſeule tranche inférieure PL eſt animée de la force $\varphi \times \delta . AB$; nous nous en tiendrons cependant à la premiere ſuppoſition, par le moyen de laquelle on peut traiter le mouvement des Fluides élaſtiques, ſuivant la même Méthode dont nous nous ſommes ſervis pour trouver le mouvement des Fluides ſans reſſort.

Du

Du mouvement d'un Fluide élaſtique dans un vaſe indéfini.

PROBLÊME I.

200. *On demande avec quelle vîteſſe une quantité donnée de Fluide élaſtique ſe répand dans un vaſe indéfini* CDGH, *dont le fond* CD *eſt immobile.*

Imaginons que le Fluide ſoit parvenu à occuper un eſpace $CDPL$, que φ ſoit la force accélératrice dont toutes ſes tranches ſont animées dans cet inſtant, u la vîteſſe de PL, & v celle d'une tranche quelconque KZ; il eſt évident que $v + \varphi\, dt$ ſeroit la vîteſſe de chaque tranche dans l'inſtant ſuivant, ſi elle ſe mouvoit librement. Mais comme par l'action des autres tranches ſa vîteſſe eſt $v + dv$, il faut donc que $\int dx\,(\varphi\, dt - dv) = 0$, c'eſt-à-dire, (*art.* 194.) que $dt \cdot \varphi \cdot q = d\left(\frac{u \cdot K}{A}\right) M + \frac{u \cdot K dq}{2K}$; donc ſi on met pour dt ſa valeur $\frac{dq}{u}$, qu'on multiplie tout par $2Ku$, & qu'on diviſe par A, on aura (en remarquant que $dM = \frac{A\,dq}{K}$)

$$\frac{2K \cdot \varphi \cdot q\,dq}{A} = d\left(\frac{uuKK}{AA} \cdot M\right).$$

COROLLAIRE.

201. Il eſt évident que la Loi de la conſervation des forces vives (dans le ſens au moins où l'on la prend

communément) n'a pas lieu ici. Car pour cela il faudroit que l'on eût l'Equation

$$\int y\,dx\,.\,\varphi\,dx \int y\,dx = A\,.\int y\,dx\,.\,v\,dv$$

au lieu que de l'Equation $\int (\varphi\,dt - dv)\,dx = 0$, qui eſt celle dont nous avons déduit la ſolution du Problême précédent, on tire

$$\int y\,dx\,.\,\varphi\,dx = \int \frac{y\,dx\,.\,A\,.\,v\,dv}{\int y\,dx};$$

ce qui donne un réſultat fort différent de celui que donneroit l'Equation tirée du Principe des forces vives.

En effet, ſuppoſons, pour ſimplifier le calcul, que le vaſe propoſé ſoit un rectangle: en ce cas, on aura $A = Kq$, $y = K$, $M = \frac{qq}{z}$, & la véritable valeur de uu ſera $4\int \varphi\,dq$; au lieu que ſi on vouloit ſe ſervir du Principe des forces vives, on trouveroit $2\,uu = 3\int \varphi\,dq$.

Du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe donné, ou qui y entre.

PROBLÊME II.

202. *Trouver la viteſſe d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe de grandeur finie* DCPL (Fig. 66.) *par l'ouverture* PL, *l'eſpace extérieur étant ſuppoſé vuide, & le fond* DC, *immobile.*

La ſolution de ce Problême ſe déduit aiſément de celle du Problême précédent. Comme les quantités $DCPL$ (A), AB (q) & PL (K), ſont ici conſtantes, on aura $\int dx\,(\varphi\,dt - dv) = 0 = dt\,.\,\varphi\,.\,AB - \frac{K}{A}\,.\,du\,.\,M +$

$\frac{u.PLlp}{2K}$, & ſuppoſant $Bb = ds$ & $PLlp = Kds$, il vient

$$2A.\varphi.AB.ds = 2K.M.udu + Auuds.$$

Corollaire I.

203. Comme l'on a $-Ad\delta = \delta Kds$, & $udt = ds$; il eſt évident que par le moyen de ces Equations, & de l'Equation du Problême, on déterminera la quantité de Fluide qui doit reſter dans le vaſe après un temps donné.

Corol. II.

204. Si K eſt fort petit, on aura $uu = 2.\varphi.AB$, on remarquera que la quantité φ (*art.* 197.) $= \frac{\pi}{\delta.K.AB}$, & que la quantité π doit toujours être donnée en δ.

Corol. III.

205. Nous avons ſuppoſé dans la ſolution précédente que l'eſpace extérieur étoit vuide, mais s'il étoit rempli par un Fluide indefini dont la denſité fût Δ, dont les parties fuſſent animées d'une force accélératrice $= F$, & dont la preſſion ſur PL fût $\Delta.F.PL.c$, il faudroit ſuppoſer alors $\delta \int dx\,(\varphi\,dt - dv) = dt.\Delta.F.c$, en regardant Δ & F comme conſtantes; parce que le Fluide extérieur ne change point ſenſiblement de denſité ni d'élaſticité par l'irruption du Fluide renfermé dans le vaſe; ce qui donneroit

$\delta \times [2A.ds.\varphi.AB - 2K.Mudu - Auuds] = 2A.ds \times \Delta.F.c.$

PROBLÊME III.

206. *Trouver le mouvement d'un Fluide élaſtique, condenſé dans un vaſe donné* DCPL *par l'impulſion d'un Fluide plus élaſtique qui eſt à l'extérieur.*

Il eſt évident qu'il doit entrer durant un certain temps dans le vaſe *DCPL*, une partie du Fluide qui eſt à l'extérieur, ſans que pour cela le Fluide extérieur, qu'on ſuppoſe indéfini, change ſenſiblement de denſité. Or on peut faire ici deux hypothèſes. Car on peut ſuppoſer, ou que le Fluide qui remplit continuellement l'eſpace *DCPL*, ſoit toujours d'une denſité uniforme dans toutes ſes parties; enſorte que la particule de Fluide qui entre à chaque inſtant dans le vaſe, devienne, en y entrant, d'une denſité égale à celle du Fluide qui y eſt contenu; ou bien que la particule de Fluide qui entre dans le vaſe conſerve toujours ſenſiblement la même denſité qu'elle avoit avant d'y entrer; enſorte qu'au bout d'un certain temps le Fluide qui, au premier inſtant occupoit l'eſpace *DCPL*, ſoit réduit, par exemple en *DCKZ*, l'autre partie *KZLP* étant occupée par le Fluide extérieur qui n'a point changé ſenſiblement de denſité.

Premiere hypothèſe.

207. Les noms demeurant les mêmes que ci-deſſus, (*articles* 202 *&* 205.), il eſt évident, qu'on aura ici $\Delta.F.c.dt = \int dx\,(\varphi\,dt + dv)$; c'eſt-à-dire, $2A.ds.\Delta.F.c = \int [2A.ds.\varphi.AB + 2K.Mudu - Auuds]$.

On remarquera que $K\delta ds$ eſt la quantité de Fluide qui entre à chaque inſtant; qu'ainſi $Ad\delta = K\delta ds$, & comme $udt = ds$, on aura par la combinaiſon de ces deux Equations, & de l'Equation du Problême, tout ce qu'on cherche ici.

Seconde hypothèſe.

208. Suppoſons que le Fluide extérieur ait déja rempli l'eſpace $FGLP$, & que le Fluide qui, au premier inſtant du mouvement occupoit l'eſpace $DCPL$, ſoit réduit en $CDGF$.

Il eſt clair que la vîteſſe des couches du Fluide $PLGF$ ſera en raiſon inverſe de leur largeur, & que celle de chaque tranche KZ du Fluide $CDGF$, ſera en raiſon compoſée de la directe de l'Aire $CDZK$ & de l'inverſe de KZ.

Soit u la vîteſſe de PL, v la vîteſſe des tranches KZ du Fluide $CDGF$; on aura la vîteſſe de GF, que j'appelle V, $= \frac{u.PL}{GF}$. & $v = \frac{V.GF.CDZK}{KZ.CDGF}$.

Soient les différentes parties de la diſtance BS, égales à l'indéterminée r, les différentes parties de AS égales à l'indéterminée x, v la vîteſſe indéterminée des tranches du Fluide $FGLP$, $AS = q$, BS, q, on aura $\Delta\int dr(Fdt - dv) = \delta\int dx(\varphi dt + dv)$ ou $\Delta.dt.F\times BS - \Delta\int dx\,dv = \delta dt.\varphi.AS + \delta\int dx\,dv$. Or ſi on appelle N ce que devient $\frac{PL^2.dr}{y}$, lorſque $r = BS$, on aura (*art.* 88.)

$$\int dr\,dv = \frac{N\,du}{PL} + PL.u.dq.\left(\frac{PL^2 - FG^2}{2PL^2.FG}\right).$$

A l'égard de la quantité $\int dx\,dv$, on trouve qu'en appellant $CDFG$, A, M ce que devient $\frac{\int dx \int y\,dx}{y}$, lorsque $x = AS$, on a, lorsque $x = AS$, $\int dx\,dv = d\left(\frac{V.GF}{A}\right)M + \frac{V.dq}{2}$. Donc si on nomme AB, a, GF, k, & qu'on mette pour q sa valeur $a - q$, pour dt sa valeur $\frac{-dq}{V}$, & pour V sa valeur $\frac{u.K}{k}$, qu'enfin on observe que $dM = \frac{A\,dq}{k}$, on arrivera à une Equation dans laquelle se trouveront les quantités $u\,du$ & $u\,u$, & dont on pourra séparer les indéterminées.

Remarque.

209. Il est nécessaire d'observer, que quand un Fluide élastique sort d'un vase dans un espace extérieur rempli par un autre Fluide, ou qu'il est comprimé dans ce même vase par l'introduction du Fluide extérieur, il ne sort du vase ou n'est comprimé que pendant un certain temps, après lequel il rentre dans le vase, ou en sort, & fait ainsi des espéces d'oscillations. Comme tout cela se peut déduire aisément de ma Théorie, je ne crois pas qu'il soit nécessaire de m'étendre là-dessus.

Problême IV.

210. CDLP (Figure 67.) *est un vase fermé de tous*

côtés, & rempli par deux Fluides de différente denſité qui ſe compriment & ſe dilatent alternativement; on demande la Loi du mouvement de ces deux Fluides.

Imaginons qu'un des deux Fluides occupe l'eſpace quelconque $CFGD$, & l'autre par conſéquent l'eſpace $PLFG$. Les noms demeurant les mêmes que dans l'*article* 208, nommons de plus $FGPL$, A, M ce que devient la quantité $\int \frac{dr \int y dr}{y}$, lorſque $r = BS$, Δ la denſité variable du Fluide $PFGL$, F la force accélératrice des particules de ce Fluide, on aura

$$\delta \int dx (\varphi dt + dv) = \Delta \int dr (F dt - dv);$$

ou, à cauſe que $v = \frac{V.k.\int y dx}{y.A}$, & $v = \frac{V.k.\int y dr}{y.A}$, on aura après les réductions.

$$- dq.A.A.[\Delta.F(a-q) - \delta\varphi q] = A.M.V \times d(Vk) + A.M.Vd(Vk).$$

On a de plus $-Ad\delta = \delta k dq$ & $A d\Delta = \Delta k dq$, & enfin $V dt = -dq$. Ces Equations combinées enſemble ſerviront à déterminer tout ce qui appartient au mouvement du Fluide.

SCOLIE.

211. On pourroit auſſi réſoudre le Problême dont il s'agit ici, en faiſant une ſuppoſition analogue à celle qui a été faite dans l'*article* 207, ſavoir que la ſurface FG qui ſépare les deux Fluides ſoit toujours à la même place; qu'ainſi le Fluide contenu dans l'eſpace conſtant $PFGL$

ſoit à chaque inſtant également condenſé ou raréfié partout, auſſi-bien que le Fluide $FCDG$, & qu'il ne paſſe à chaque inſtant du Fluide $PFGL$ dans l'autre Fluide qu'une quantité de matiere telle, qu'en ſe dilatant dans l'eſpace $FfgG$ abandonné par le Fluide $FCDG$, elle devienne d'une denſité égale à ce Fluide.

De-là il s'enſuit que ſi on prend l'eſpace $FG\gamma\varphi$, tel qu'il contienne une quantité de matiere égale à celle qui eſt contenue dans $FGgf$, on aura $\delta \times Ss = \Delta \times S\sigma$; & que ſi V eſt la vîteſſe de FG pour parvenir en fg, $\frac{V\delta}{\Delta}$ ſera celle de $\varphi\gamma$ pour parvenir en FG, qu'ainſi la vîteſſe $\frac{V\delta}{\Delta}$ ſe changera d'un inſtant à l'autre en V; & ſi on prend Ss conſtante & égale à ds, & qu'on faſſe $\frac{V\delta}{\Delta} = \mathrm{V}$, on aura $\delta[\varphi.dt.AS + d\left(\frac{V.GF}{A}\right).M - \frac{Vds}{2}] = \Delta[F.dt.BS + (V - \mathrm{V}).S\sigma - d\left(\frac{\mathrm{V}.GF}{\mathrm{A}}\right) - \frac{\mathrm{V}.S\sigma}{2}]$. On aura ſoin de mettre dans le premier membre $FG.Ss$ pour dA, & $fg - FG$ pour la différence de FG, & dans le ſecond membre, on mettra $FG.S\sigma$ pour $d\mathrm{A}$, & $FG - \varphi\gamma$ pour la différence de FG.

Du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſe dilate ou ſe comprime à-la-fois vers deux côtés différens.

212. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici, que les Fluides ne ſe comprimoient ou ne ſe dilatoient que par une de leurs

leurs extrémités, l'autre étant toujours appuyée ſur un obſtacle immobile. Il eſt queſtion préſentement de déterminer les Loix du mouvement d'un Fluide, dont les deux extrémités appuyent contre des obſtacles mobiles.

PROBLÊME V.

213. *Une maſſe de Fluide élaſtique* CDLP (Fig. 68.) *ſe trouvant condenſée & réduite dans l'eſpace* cdlp, *on demande la vîteſſe d'une de ſes tranches quelconques* KZ, *la vîteſſe des deux tranches ou ſurfaces* CD, PL *étant donnée.*

Il eſt évident que toute la difficulté ſe réduit à trouver l'eſpace *cdzk*, dans lequel a été réduit le Fluide qui occupoit auparavant l'eſpace *CDZK*. Car cet eſpace étant une fois trouvé, il eſt conſtant que la vîteſſe de *KZ* ſera à celle de *CD* comme *Oo* à *Aa*: or *CDZK*:*cdzk*:: *KZPL*:*kzpl*; c'eſt-à-dire, *Aa*.*CD* − *Oo*.*KZ*:*CDZK*:: *Bb*.*PL* + *Oo*.*KZ*:*KZPL*; donc *Aa*.*CD*.*KZPL* − *CDZK*.*Bb*.*PL* = *Oo*.*KZ*.*KZPL* + *Oo*.*KZ* × *CDZK*, & $Oo = \frac{Aa.CD.KZPL - Bb.PL.CDZK}{KZ.CDPL.}$. Donc ſi on nomme *u* la vîteſſe de *PL*, *V* celle de *CD*, *v* celle de *KZ*, on aura $v = \frac{V.CD.KZPL - u.PL.CDZK}{KZ.CDPL}$.

REMARQUE.

214. On peut encore s'y prendre d'une autre maniere pour déterminer la vîteſſe de *KZ*. Car la vîteſſe de *KZ* par rapport à celle de *CD*, *PL* étant conſidérée comme

fixe, est $\frac{V.CD.KZPL}{KZ.CDPL}$; la vîtesse de KZ par rapport à celle de PL, CD étant considérée comme fixe, est $\frac{u.PL.CDZK}{KZ.CDPL}$. Prenant la différence de ces deux vîtesses, qui est la vîtesse réelle de ZK, on aura l'expression que nous avons trouvée dans l'article précédent.

Si les surfaces CD, PL se mouvoient dans le même sens, alors il faudroit prendre la somme des deux vîtesses $\frac{V.CD.KZPL}{KZ.CDPL}$, & $\frac{u.PL.CDZK}{KZ.CDPL}$ pour la vîtesse de KZ.

Corollaire I.

215. Donc, soit que les surfaces CD, PL se meuvent en même sens ou en sens contraires, on peut regarder la vîtesse v de KZ comme composée de la vîtesse qu'elle auroit, si PL étoit fixe, & de la vîtesse qu'elle auroit, si CD étoit fixe. Soient appellées v & u ces deux vîtesses, on aura $v = v + u$, en prenant u positive ou négative, selon que PL se mouvra en même sens que CD, ou en sens contraire.

Corol. II.

216. Soit $KZ = y$, la distance de l'indéterminée KZ à $PL = r$, sa distance de $CD = x$, & l'espace $CDPL = A$: soit imaginé le Fluide partagé en une infinité de tranches, dont la masse $y\,dx$ ou $y\,dr$ soit donnée. Il est clair que la vîtesse v dans un instant quelcon-

que, ſera $\frac{Vk\int y dx}{yA}$. En prenant la différence de cette quantité, il faut ſuppoſer pour plus de facilité la conſtante $y dx = dA = Aa . CD + Bb . PL$, & remarquer que la difference de $\int y dx$ eſt $y dx \times \frac{Oo}{dx}$, & celle de $y = dy \times \frac{Oo}{dx}$. Par ce moyen on trouvera facilement la valeur de $\int dr dv$, & par une Méthode ſemblable, on trouvera auſſi celle de $\int dx du$.

Régle générale pour déterminer les Loix du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſe meut vers deux côtés à-la-fois.

217. φ étant la force accélératrice qu'on ſuppoſe animer toutes les tranches, & faire effort pour les mouvoir tout-à-la-fois en deux ſens contraires, ſoit ſuppoſée dans un inſtant quelconque la vîteſſe v de la tranche $KZ = v + u$; dans l'inſtant ſuivant la vîteſſe v deviendroit $v - \varphi dt$, & la vîteſſe u, $u - \varphi dt$. Donc on peut regarder $\int \frac{dr(\varphi dt + dv)}{dt}$ comme la preſſion que ſouffre CD, & $\int dx \left(\frac{\varphi dt + du}{dt}\right)$ comme la preſſion que ſouffre PL, & l'effet de ces preſſions doit être anéanti.

Donc 1°. s'il n'y a aucun obſtacle appliqué en CD, ni en PL, il n'y a qu'à ſuppoſer $\int dr \left(\frac{\varphi dt + dv}{dt}\right) = 0$, & $\int dx \left(\frac{\varphi dt + du}{dt}\right) = 0$.

2°. S'il y a un obſtacle appliqué en CD, il faut décompoſer le mouvement de cet obſtacle en deux, dont l'un ne nuiſe point au mouvement de CD, l'autre produiſe ſur CD une preſſion égale à $\int \frac{dr(\phi dt + dv)}{dt}$. Il en ſera de même pour PL. On aura donc deux Equations, qui avec les Equations $dt = \frac{A\alpha}{V}$, $dt = \frac{Bb}{u}$ ſerviront à déterminer tout ce qui concerne le mouvement d'un pareil Fluide.

COROLLAIRE.

218. Par les régles précédentes, on peut déterminer 1°. le mouvement de trois Fluides de différente élaſticité contenus dans un vaſe de figure quelconque, & fermé de toutes parts, dont deux appuyent contre les fonds du vaſe, chacun contre le ſien, & le troiſiéme eſt ſitué entre les deux autres.

2°. Le mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe étant pouſſé par un Piſton.

3°. Le mouvement d'un Fluide élaſtique contenu dans un vaſe Cylindrique, lequel Fluide pouſſe d'un côté un Corps hors de ce vaſe, & de l'autre fait reculer le vaſe, qu'on ſuppoſe n'être point immobile, & avoir une maſſe donnée.

Enfin il me ſemble qu'il ne ſauroit être rien propoſé ſur les Loix du mouvement des Fluides élaſtiques, dont on ne puiſſe venir aiſément à bout par la combinaiſon des Principes que nous avons établis dans ce Chapitre.

Au reſte, dans toute la Théorie précédente, nous avons ſuppoſé que les Fluides élaſtiques étoient toujours d'une denſité uniforme dans toutes leurs parties. Cette ſuppoſition n'eſt exactement vraie, que quand les parties du Fluide ſont imaginées ſans peſanteur, & qu'une même force les comprime. Elle eſt même peu éloignée du vrai, lorſqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'une maſſe d'air qui ſort d'un vaſe; parce que la peſanteur de cette maſſe ne ſauroit, à moins qu'elle ne ſoit très-grande, en comprimer ſenſiblement les particules, & que le mouvement qui réſulte du reſſort de l'air eſt cenſé beaucoup plus grand que celui qui réſulte de ſa peſanteur. Néanmoins ſi l'on vouloit appliquer notre Méthode à la recherche du mouvement d'un Fluide élaſtique, dont les parties ſeroient différemment comprimées, rien ne ſeroit plus facile.

Suppoſons d'abord dans le cas de l'*art.* 193, que toutes les parties du Fluide *DCPL* (Figure 65.) ſoient inégalement comprimées; & imaginons-le partagé en une infinité de petites tranches horizontales égales en maſſe, dont y ſoit la largeur, dx la hauteur & z la denſité, il eſt conſtant que la force dilatatrice de chaque tranche pourra être exprimée par une fonction Z de ſa denſité z, & que chaque tranche ſe dilatera à chaque inſtant d'une quantité proportionnelle à cette force. Donc ſi on nomme M la maſſe entiere du Fluide, δ la denſité de ſa tranche inférieure, & Δ la force qui la comprime, l'accroiſſement de volume d'une portion quelconque $\int yz\,dx$

sera proportionnelle à $\int y z Z dx$, & comme $K dq$ exprime l'augmentation de volume de la masse totale à chaque instant, il s'ensuit que $\frac{K dq \times \int y z Z dx}{Q}$ sera l'accroissement en volume de la masse $\int y z dx$, (Q étant ce que devient $\int y z Z dx$, lorsque $x = AB$). De-là il est évident que la vîtesse v de chaque tranche sera en raison de $\frac{\int y z Z dx}{y}$, & pour avoir le mouvement du Fluide, il faudra faire

$$\int Z dx - \int \frac{z dx dv}{dt} = 0.$$

ce qui n'est plus qu'une affaire de calcul.

On remarquera de plus, que si on nomme α la quantité dont la tranche inférieure du Fluide se dilate, $\frac{\alpha . y z Z dx}{\Delta . K \partial dq}$ sera la quantité dont se dilate la tranche $y z dx$; que par conséquent $\alpha = \frac{K K \partial \Delta dq^2}{Q}$; qu'ainsi, appellant dz la diminution de densité du Fluide contenu dans la masse $y z dx$, on aura $- \frac{dx}{z} = \frac{K dq . Z}{Q}$. On a de plus (en supposant la constante $K \partial dq = dp$) $dt = \frac{dq}{u} = - \frac{dp}{K \partial u}$. Toutes ces Equations combinées serviront à déterminer la quantité de Fluide qui reste dans le vase après un temps donné, & la densité des différentes parties de cette masse de Fluide: le Problême est donc réduit, comme l'on voit, à une pure question d'Analyse.

Si on avoit égard à la pesanteur du Fluide, il faudroit examiner d'abord quel devroit être à chaque instant le changement de vîtesse des différentes tranches, eu égard à leur pesanteur seule, & abstraction faite de leur ressort, & examiner ensuite le mouvement de ces mêmes tranches, eu égard à leur ressort seul, & abstraction faite de leur pesanteur. La combinaison de ces deux mouvemens donneroit le mouvement réel du Fluide à chaque instant, en employant la même Méthode que dans les *art.* 216 *&* 217. Il faudroit aussi se servir de cette même Méthode pour déterminer le mouvement du Fluide, si dans ces mêmes hypothèses il se dilatoit vers deux côtés à-la-fois.

De la vîtesse du son.

219. Ce seroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la vîtesse du son : mais j'avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet, rien qui pût me satisfaire. Je ne connois jusqu'à présent que deux Auteurs qui ayent donné des formules pour la vîtesse du son; savoir, M. *Newton* dans ses Principes, & M. *Euler* dans sa Dissertation sur le feu, qui a partagé le prix de l'Académie en 1738. La formule donnée par M. *Euler* sans démonstration, est fort différente de celle de M. *Newton*, & j'ignore quel chemin l'y a conduit. A l'égard de la formule de M. *Newton*, elle est démontrée dans ses Principes, mais c'est peut-être l'endroit le plus obscur & le plus difficile de cet Ouvrage. M. *Jean Bernoulli* le fils, dans la piéce sur *la lumiere* qui a rempor-

té le prix de l'Académie en 1736, dit qu'il n'oseroit se flatter d'entendre cet endroit des Principes : aussi nous donne-t-il dans la même piéce, une Méthode plus facile & plus aisée à suivre que celle de M. *Newton*, & par le moyen de laquelle il arrive à la même formule qu'a donnée ce grand Géométre.

M. *Bernoulli* suppose qu'une particule d'air D (Fig. 69.) étant poussée en d, condense jusqu'à une certaine distance les particules C, B, A qui la suivent, ensorte que C parvient en c, B en b, &c. jusqu'à un point A où la condensation est la plus grande qu'il est possible ; & qu'en même-temps la partie DG égale à AD se dilate de la même façon, les particules E, F, venant en e, f, jusqu'au point G où la dilatation est la plus grande qu'il est possible. M. *Bernoulli* suppose ensuite que l'on appelle la gravité g, A la hauteur d'une colomne d'air de la même densité que la fibre AG, & qui pourroit être en équilibre avec 28 pouces de Mercure ; il suppose aussi que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité ; & appellant $CD, a, Bb, r, Cc, s, Dd, t$, il trouve l'élasticité de l'air condensé en $cd = \frac{gAa}{a+s-t}$, & celle de l'air condensé en $bc = \frac{gAa}{a+r-s}$. D'où il s'ensuit que la force motrice du point C, est $\frac{gAa(2s-t-r)}{aa}$. De plus, l'Auteur prouve que les excursions de tous les points de la fibre sont Isocrones ; d'où il s'ensuit que la force accélératrice du point C est comme l'espace Cc qu'il parcourt.

Donc

Donc $\frac{gA.(2s-t-r)}{s}$ doit être une conſtante, donc en général, ſi on appelle t le chemin Dd fait par une particule quelconque $CD = dy$, on aura $ccddt = tdy^2$. Equation qui eſt la même que celle de la corde ſonore tendue; de-là M. *Bernoulli*, en appliquant ici les régles que l'on a données pour les vibrations des cordes ſonores, trouve le temps d'une vibration de la fibre AG; & comme à chaque vibration il ſe forme, ſelon lui, une nouvelle fibre égale à la premiere, il a par ce moyen l'eſpace parcouru par le ſon durant un temps donné.

La grande difficulté, ce me ſemble, eſt de faire bien comprendre, comment la premiere fibre AG peut en former une ſeconde qui lui ſoit égale. M. *Bernoulli* prétend, que quand la premiere fibre AG eſt une fois formée, la matiere étant condenſée en A le plus qu'il eſt poſſible, tend à ſe dilater vers L auſſi-bien que vers G, & que c'eſt ainſi que la ſeconde fibre ſe forme; mais 1°. je ne vois pas qu'il ſoit démontré qu'il doive naître de-là une ſeconde fibre égale à la premiere. 2°. Il me paroît que, ſuivant les Principes de M. *Bernoulli*, la ſeconde fibre doit commencer à ſe former vers L, lorſque la fibre AG recommence à ſe dilater vers G, d'où il s'enſuivroit que le nombre des fibres formées ſeroit égales au nombre des excurſions ſucceſſives de la fibre AG de A vers G, & de G vers A. Or, cela poſé, je dis que l'on devroit trouver la viteſſe du ſon une fois plus grande que M. *Bernoulli* ne l'a trouvée. Pour le démon-

trer, je remarque que $\frac{gAt}{cc}$ étant la force qui fait parcourir l'eſpace Cc à la particule C, on trouvera par un calcul fort ſimple, que (p exprimant le rapport de la circonférence au diamétre) $\frac{c \cdot p}{2\sqrt{[gA]}}$ eſt le temps de l'excurſion de C en Cc; ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{AG \cdot p}{2p\sqrt{[gA]}}$, parce que l'Equation $-ccddt = tdy^2$, donne $AG = p \cdot c$; d'où il s'enſuit que ce temps eſt au temps d'une demi-oſcillation d'un pendule de longueur donnée D, comme $\frac{AG \cdot p}{2p[\sqrt{gA}]}$ à $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$, c'eſt-à-dire, que ſi on nomme B, l'eſpace parcouru par le ſon durant un tems quelconque, ce tems ſera à celui d'une oſcillation du Pendule, comme $\frac{B}{AG} \times \frac{AG \cdot p}{2p\sqrt{[gA]}}$ à $\frac{2p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$, ou comme B à $2p\sqrt{[D.A]}$; d'où il s'enſuit que pendant le tems d'une oſcillation du Pendule, le ſon devroit parcourir un eſpace = à $2p\sqrt{[D.A]}$; double de celui que M. *Bernoulli* a trouvé. J'avoue que cette difficulté n'auroit pas lieu, ſi chaque fibre ne ſe formoit que quand la fibre AG a fait une oſcillation entiere, c'eſt-à-dire, quand la partie C, par exemple, eſt venue en (c), après avoir été auparavant en c. Or il eſt vrai que la ſeconde fibre n'eſt formée qu'après une oſcillation entiere de la premiere fibre; mais cette ſeconde fibre, ce me ſemble, doit en former une troiſiéme & une quatriéme pendant la ſeconde oſcillation de la fibre AG; de

ſorte que le nombre des fibres formées ſera toujours égal au nombre des excurſions de la fibre AG, en comptant la fibre AG pour la premiere fibre.

Comme M. *Newton* & M. *Bernoulli* ſont arrivés tous les deux à la même formule, je ne crois pas devoir examiner ici ce que leur Théorie pourroit avoir de commun ou de différent. J'obſerverai ſeulement que M. *Newton* ſuppoſe, comme M. *Bernoulli*, qu'il s'engendre une nouvelle fibre égale à la premiere, lorſque cette premiere a achevé une vibration entiere; mais j'avoue qu'il ne me paroît pas non plus avoir expliqué clairement, comment une premiere fibre en forme une ſeconde égale à la premiere, & comment le nombre des fibres eſt égal au nombre de vibrations totales, que fait ou que feroit la premiere fibre pendant le temps que ces fibres nouvelles ſe forment.

On trouvera dans le Commentaire ſur les Principes de *Newton*, par les PP. *le Seur* & *Jacquier*, de très-bonnes remarques critiques de feu M. *Cramer*, ſur la Théorie de *Newton*. On trouvera auſſi une Théorie très-ſavante ſur la propagation du ſon, dans le premier & le ſecond Volume des Mémoires de la Société des Sciences de Turin, par le Savant & célèbre Géométre M. *de la Grange*. Quoique différentes occupations ne nous ayent pas permis juſqu'à préſent d'étudier à fond cette Théorie, & de juger ſi elle ſatisfait pleinement aux difficultés expoſées ci-deſſus, nous la croyons très-digne de l'attention des Géométres, & par elle-même, & par le rare mérite de l'Auteur.

CHAPITRE V.

Du mouvement des Fluides qui coulent dans des Tuyaux fléxibles.

PROBLÊME I.

220. NMDC, PLHG (Fig. 70.) *ſont deux Tuyaux infléxibles & égaux, ſéparés l'un de l'autre par un Tuyau* CPLD, *dont les parois ſont fléxibles ſans élaſticité, & qui eſt uni à chacun de ces Tuyaux; on ſuppoſe qu'un Fluide ſans peſanteur coule dans ce Tuyau compoſé, & que ſa vîteſſe ſoit parvenue à l'état d'uniformité; on demande qu'elle figure prendra le Tuyau* CPLD.

Il eſt conſtant par les régles de la ſtatique, que la figure que prendra le vaſe *CPLD*, doit être telle, que le rayon de ſa développée en un point quelconque *Z* ſoit en raiſon inverſe de la preſſion en ce point *Z*. Or nommant *AO*, *x*, *KZ*, *y*, *CD*, *a*, *u* la vîteſſe en *CD*, qu'on ſuppoſe conſtante, *v* la vîteſſe en *KZ* dont la différence eſt $-dv$, parce que *x* croiſſant, *v* diminue, on aura $\int -\frac{dxdv}{dt}$ pour la preſſion en *Z*, c'eſt-à-dire, que la preſſion en *Z* ſera $\int \frac{ydx.uady}{y^3\,dt} = \frac{ydx.ua}{dt} \times \left(\frac{KZ^2 - CD^2}{2KZ^2.CD^2}\right) =$ (en mettant pour *dt* ſa valeur $\frac{dx.y}{ua}$) $\frac{uu}{2yy} \times (yy - aa)$. Soit la conſtante $u = \sqrt{[2pc]}$, c'eſt-à-dire, égale à la vîteſſe qu'un

Corps pesant acquerroit en tombant d'une hauteur donnée c, & étant animé par la pesanteur p, on aura $pc - \frac{pca^2}{y^2}$ pour la pression en Z; ou, ce qui revient au même, $pc - \frac{pc \cdot AD^2}{OZ^2}$.

Donc nommant AD, moitié de CD, b; OZ, t; il faut que $pc - \frac{pcb}{t^2} = - \frac{dx\,ddt}{(dx^2+dt^2)^{\frac{1}{2}}}$, en supposant dx constante, ou (pour garder la Loi des homogenes) il faut que $pc\left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) = - \frac{pAA.dx\,ddt}{(dx^2+dt^2)^{\frac{1}{2}}}$, A étant une constante que nous déterminerons.

Soit $bdx = qdt$, on aura $qddt = - dqdt$, & $(ctt - cbb) \times bqdt \cdot (qq + bb)^{\frac{1}{2}} = AAbbttdq$, dont l'intégrale est $bc \times (tt + bb + Bt) \cdot \sqrt{[qq + bb]} = tAAbq$, B étant une nouvelle constante. Par le moyen de cette Equation, & de l'Equation $bdx = qdt$, on construira la Courbe, laquelle, comme il est aisé de le voir par l'Equation précédente, sera composée de deux parties égales & semblables DV, VL.

Pour déterminer les constantes A & B, on remarquera que $dt = 0$ doit rendre $x =$ à la moitié de la donnée AB, & que de plus la longueur de la Courbe DVL est donnée; deux conditions qui fixent nécessairement la valeur des constantes A & B.

REMARQUE I.

221. Il est évident qu'on peut toujours, par la Méthode

que nous venons d'expoſer, trouver la figure du Tuyau $CPLD$, quand même on auroit égard à la peſanteur du Fluide; pourvû qu'on ſuppoſe toujours la vîteſſe parvenue à l'état d'uniformité; autrement le Tuyau $CDPL$, ne conſerveroit pas conſtamment la même figure: & pour lors, il faudroit que l'Equation qu'on trouveroit, donnât la figure du vaſe pour chaque inſtant. C'eſt de quoi nous traiterons plus bas.

Remarque II.

222. Si le vaſe $CDLP$ eſt ſuppoſé élaſtique, en ce cas, ſoit F la force élaſtique de ſes parois; force qui doit être connue, & dont le rapport à $2pc$ doit être donné. L'effet de cette force pour pouſſer le point Z, ſuivant Zr, eſt $\frac{-Fdxddt}{dx^2+dt^2}$, & cet effort doit être égal à la preſſion du Fluide ſuivant ZR. D'où l'on tirera l'Equation

$$pc\left(1-\frac{b^2}{t^2}\right)=\frac{-Fdxddt}{dx^2+dt^2},$$

& par conſéquent

$$cp(tt+bb+Bt)=tF.dx.\log.\frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dt^2]}};$$

Le ſecond membre de cette Equation renferme une quantité infiniment petite dx; cependant il n'en eſt pas moins homogene au premier membre qui ne renferme que des quantités finies; parce que F doit néceſſairement être ſuppoſée infiniment grande par rapport à $2pc$; ſoit donc $F=\frac{pc.b}{dx}$, & l'on aura

$$tt + bb + Bt = bt.\log.\frac{dx}{v\,[dx^2+dt^2]},$$

Equation d'où l'on tirera celle de la Courbe.

La conſtante B ſe déterminera par cette condition, que $dt = 0$ rend $x = \frac{AB}{2}$. Il n'y a que cette conſtante à déterminer; car comme les parois DZL ſont ſuppoſés capables d'extenſion, leur longueur n'eſt pas donnée, comme elle l'étoit dans l'*article* 220.

PROBLÊME II.

223. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Problême précédent, avec cette condition de plus, que les parois* DZL, CKP, *ſoit en mouvement, on demande le rapport des vîteſſes des différentes couches du Fluide.*

Soit *NMDLHGPKCN* (Fig. 71.) l'eſpace qu'occupe le Fluide dans un inſtant quelconque, & ſuppoſons que dans l'inſtant ſuivant les parois *DZL*, *CKP* viennent en *DzL*, *CkP* & le Fluide en *nmDzLhgPkCn*. Il eſt évident, 1°. que la vîteſſe des tranches depuis *NM* juſqu'en *CD*, ſera = à celle de *NM*.

2°. Soit pris l'eſpace $nmDVzkXCn = NMDZKCN$. Il eſt conſtant que la vîteſſe de *KZ* ſera à celle de *NM*:: *Oo*:*Nn*, c'eſt-à-dire, (à cauſe que $Oo \times KZ - NnmM = 2DVZ$) :: $NnmM + 2DVZ : Nn \times KZ$.

3°. A l'égard de la vîteſſe des tranches depuis *PL* juſqu'en *GH*, on trouvera par un raiſonnement ſemblable, qu'elle eſt à celle de *NM* :: $NnmM + 2DVLZD$: *PL*.*Nn*.

COROLLAIRE.

224. 1°. Si on appelle u la vîteſſe de NM dans un inſtant quelconque, laquelle ſoit $u - du$ dans l'inſtant ſuivant dt; on aura la preſſion en un endroit quelconque Y du vaſe $CDMN = \frac{-du.MY}{dt} = \frac{+udu.MY}{Nn}$ (abſtraction faite de la peſanteur.)

2°. Soit $AO = x$, $KZ = y$, v la vîteſſe de KZ, & ſoit le Fluide contenu en $CDZLPKC$ partagé en tranches d'une maſſe égale, que j'appellerai $y\,dx$, & que je ſuppoſerai pour plus de facilité égales à $NnmM +$ l'eſpace curviligne infiniment petit $2DVLZD$. La preſſion en Z ſera conſtamment égale à $\int \frac{dx\,dv}{dt}$, plus à la preſſion en CD qui eſt (*n.* 1.) $= \frac{+udu.MD}{Nn}$.

Soit $NM = a$; $Nn = ds$; $VZ = dy$; on aura $v = \frac{u(ads + 2\int dx\,dy)}{yds}$, dont on prendra la différence, en remarquant que la différence de y eſt $VZ + dy \times \frac{Oo}{dx}$; & que celle de $\int dx\,dy$ eſt $\int dx\,d\,dy + dy.Oo$: on aura ainſi la valeur de $\int \frac{dx\,dv}{dt}$, & la preſſion en L ſera égale à ce que devient $\int \frac{dx\,dv}{dt}$, lorſque $x = AB$, plus à la preſſion en CD qui a été trouvée dans le *n.* 1.

3°. Soient v les vîteſſes depuis PL juſqu'en GH, on a $v = \frac{u(ads + 2DZLVD)}{ads}$. Donc nommant $DZLVD$, dA, &

& PQ, r, on aura la preſſion en Q égale à $\int \frac{dr\,dv}{dt}$, plus à la preſſion en L trouvée dans le *n.* 2.

4°. Si le Fluide étoit peſant, il n'y auroit qu'à retrancher la preſſion trouvée dans les 3 n. précédens pour un endroit quelconque Z, de la preſſion que ſouffriroit cet endroit, ſi le Fluide n'étoit pas en mouvement, c'eſt-à-dire, de $p\,(NC+AO)$, & l'on aura alors la preſſion en Z; ce qu'il eſt aiſé de démontrer, puiſque $\int dx\,(p-\frac{dv}{dt})$ eſt toujours alors la valeur de la preſſion.

Régle générale pour déterminer le mouvement d'un Fluide qui coule dans un vaſe fléxible, élaſtique ou non.

225. Il faut 1°. que la preſſion en GH trouvée par l'article précédent, ſoit $= 0$. 2°. Si le vaſe n'eſt point élaſtique, il faut regarder la vîteſſe d'un de ſes points Z dans un inſtant quelconque, comme compoſée de la vîteſſe qu'il aura dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre vîteſſe infiniment petite, dont la direction ſoit perpendiculaire à la courbe en Z, & ſoit égale à la preſſion que nous avons déterminée pour le point Z. On aura par-là les Equations néceſſaires pour déterminer ce qu'on cherche. Il eſt vrai qu'elles ſeront extrêmement compliquées & chargées de différentielles: mais la nature du ſujet ne permet pas qu'elles ſoient plus ſimples.

3°. Si le vaſe eſt élaſtique, il faut d'abord conſidérer ce que l'action de ſes parois, abſtraction faite de tout le reſte, devroit changer à la vîteſſe du point Z, dans un inſtant

quelconque ; & regarder enſuite cette nouvelle vîteſſe comme compoſée de celle qu'aura le point Z dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre vîteſſe perpendiculaire à Z qui ſoit détruite par la preſſion en Z.

REMARQUE I.

226. La ſolution du Problême précédent auroit un peu plus de facilité, ſi on ſuppoſoit que toutes les parties du vaſe DZL arrivaſſent en même-tems à la verticale DL, comme pluſieurs Géométres l'ont ſuppoſé dans la ſolution du Problême *de cordis vibrantibus*. Mais il faut que cette ſuppoſition quadre avec les Equations qui doîvent donner la ſolution du Problême, & que nous avons enſeigné à trouver ci-deſſus.

Par exemple, ſi les parois du vaſe ſont tels que dans leur plus grande extenſion leur longueur DZL ſoit peu différente de AB, on trouve qu'en ſuppoſant la vîteſſe du Fluide parvenue à l'état d'uniformité, & le Fluide ſans peſanteur, la courbe DZL doit prendre la forme de la trochoïde allongée, qui eſt la plus ſimple de toutes celles que peut prendre une corde ſonore en faiſant ſes vibrations.

Car la preſſion en Z étant comme $1 - \frac{CD^2}{KZ^2}$, elle ſera auſſi comme $KZ - CD$, à cauſe que KZ eſt très-peu différente de CD (*hyp.*). Donc $KZ - CD$ devra être en raiſon inverſe du rayon oſculateur en Z. Ce qui eſt l'Equation de la courbe de la corde ſonore miſe en vibration.

Remarque II.

227. Si on ſuppoſe la vîteſſe conſtante dans le Tuyau CM, & que ce Tuyau ſoit entretenu toujours plein à la même hauteur MN, il eſt conſtant (*article* 223.) que la vîteſſe de GH ſera plus grande que celle de NM, tandis que le Tuyau fléxible DZL va de Z vers O; qu'au contraire, la vîteſſe de GH ſera plus petite que celle de NM, quand le Tuyau DZL va de O vers Z; & que la vîteſſe de GH recevra ainſi alternativement des degrés égaux d'augmentation & diminution. D'où il s'enſuit, que pendant une oſcillation entiere du Tube fléxible, il ſortira la même quantité de Fluide qui ſortiroit d'un Tuyau non fléxible de la largeur NM, & dans lequel le Fluide couleroit avec une vîteſſe conſtante égale à la vîteſſe moyenne de GH.

Remarque III.

228. La plus grande vîteſſe de la tranche inférieure GH, eſt lorſque le Tuyau DZL eſt au milieu de ſa vibration de Z vers O; & la plus petite vîteſſe, au contraire, eſt lorſque DZL eſt au milieu de ſon retour de O vers Z. Si on nomme l'eſpace $DZLD$, A, x l'eſpace que parcourroit la ſurface NM avec ſa vîteſſe conſtante, pendant le tems d'une vibration du Tuyau; on trouvera, que tandis que DZL va de Z vers O, la quantité de Fluide qui ſort, eſt à la quantité de Fluide qui ſortiroit par un Tuyau infléxible & Cylindrique de la largeur NM,

comme $nx + 4A$ à nx. Au contraire, quand le Tuyau DZL va de O vers Z, ces deux quantités ſont entr'elles comme $nx - 4A$ à nx.

AVERTISSEMENT.

Nous terminerons ici notre Théorie du mouvement des Fluides, tant élaſtiques que non élaſtiques, en avertiſſant nos Lecteurs, que depuis l'année 1744, où cette Théorie a été publiée pour la premiere fois, nous l'avons approfondie de nouveau, & expoſé le réſultat de nos recherches dans différens Ouvrages, entr'autres dans notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, imprimé en 1752, & dans le 4e Mémoire de nos Opuſcules Mathématiques, Tome I. La maniere ſimple, directe & rigoureuſe dont nous avons enviſagé le mouvement des Fluides dans ces deux Ouvrages, a été entiérement adoptée depuis par le célèbre M. Euler dans les Mémoires de Berlin de l'année 1755; on peut voir auſſi dans le ſecond & le troiſiéme Volumes des Mémoires de la Société des Sciences de Turin, (1762 & 1766,) les nouveaux degrés de perfection que le Savant & profond Géométre M. de la Grange a donnés à cette Méthode. Nous avons fait nous-mêmes, ſur cet important ſujet, de nouvelles recherches, inſérées dans le Tome V de nos Opuſcules, & auxquelles nous renvoyons nos Lecteurs.

Il eſt certain qu'on ne peut déterminer rigoureuſe-

ment les loix du mouvement des Fluides dans des vaſes, que par la Méthode que nous avons d'abord indiquée dans notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, & developpée depuis dans le premier & le cinquiéme Volumes de nos Opuſcules. Mais cette Méthode a l'inconvénient que dans le plus grand nombre des cas, le calcul analytique s'y refuſe. Il n'eſt pas moins certain que la ſuppoſition du parallèliſme des tranches, adoptée dans le préſent Traité, n'eſt pas rigoureuſement exacte, & peut même, dans pluſieurs cas, s'écarter ſenſiblement du vrai. Mais il eſt hors de doute, quoique d'habiles Géométres ayent paru penſer le contraire, que la conſervation des forces vives a toujours lieu dans le mouvement des Fluides; nous l'avons prouvé dans le Tome I. *de nos Opuſcules*, 4e Mémoire, page 156. La difficulté eſt de trouver une hypothèſe qui repréſente, au moins d'une maniere approchée, le mouvement des différens filets du Fluide, & la figure de ces filets; problême d'autant plus difficile, qu'il eſt vraiſemblable que la figure de ces filets ne s'aſſujettit pas, au moins dans tous les cas, à la figure du vaſe, & qu'il y a une partie du Fluide qui à chaque inſtant reſte a peu près ſtagnante, ou dont le mouvement eſt beaucoup plus lent que celui du reſte de la maſſe, & fort irrégulier, tant dans ſa quantité que dans ſa direction. J'ai fait voir dans le Tome V de mes Opuſcules, pag. 78 & ſuivantes, la difficulté d'aſſigner le mouvement du Fluide dans ces ſortes de filets ou tuyaux fictifs, dans leſquels on ſuppoſe qu'il ſe meut,

& j'ajouterai encore ici, que ces filets ou tuyaux fictifs doivent vraiſemblablement varier à chaque inſtant; ce qui doit rendre encore plus difficile la détermination de leur figure, & celle du mouvement que le Fluide doit avoir dans la direction de ces filets. Il y auroit peut-être un moyen de s'aider de l'expérience dans cette recherche, & de connoître le mouvement des différentes parties d'un Fluide qui coule dans un vaſe. Ce ſeroit d'avoir du ſable très-fin, de deux ou de pluſieurs couleurs différentes & de même peſanteur; de diſpoſer ces ſables par différentes couches dans des vaſes de verre, percés à leur partie inférieure, ſoit verticalement, ſoit horizontalement; de laiſſer enſuite écouler le ſable, & d'examiner le mouvement de ſes différentes parties. Il y a pluſieurs années qu'un Particulier apporta à l'Académie quelque choſe de ſemblable à ce que nous propoſons ici; & les expériences qui furent faites alors devant elle, lui parurent dignes d'être ſuivies & répétées, comme étant propres à jetter du jour ſur le mouvement des Fluides dans des tuyaux.

LIVRE TROISIÉME.

De la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps.

CHAPITRE I.

Principes généraux de la réſiſtance des Fluides.

LEMME.

229. *SI une Courbe* BAC (Fig. 72) *compoſée de deux parties égales & ſemblables, & ſemblablement ſituées autour de ſon Axe* AD, *eſt couverte d'un grand nombre de très-petits cercles* S, *qui ſe touchent; je dis que le nombre de ces Cercles ſera égal à la circonférence* BAC *diviſée par le diamétre* Gg *ou* Mm *d'un de ces Cercles.* Ce qui eſt évident.

COROLLAIRE I.

230 Donc ſi on nomme p le rapport de la circonférence au diamétre, α la circonférence BAC, la ſomme des ſurfaces de tous ces Cercles, ſera $\frac{p \cdot Mm^2 \cdot \alpha}{4\,Mm}$.

COROL. II.

231. Si BAC étoit la coupe d'un ſolide de révolution qui fut tout couvert de petites boules, en ce cas, nommant α la ſurface courbe formée par BAC, on auroit le nombre des boules égal à $\frac{\alpha}{Mm^2}$, & leur ſolidité égale à $\frac{p.Mm^3.\alpha}{6\,Mm^2}$.

COROL. III.

232. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*article* 229, ſi on décrit une figure bac (Figure 73) égale & ſemblable à BAC, qui en ſoit infiniment proche & ſituée ſur le même Axe, & qu'après avoir tiré par tous les points M de BAC des lignes $M\mu$ perpendiculaires à BAC, on imagine que tout l'eſpace $BbAcC$ renfermé entre les deux courbes ſoit couvert de Cercles, dont les centres ſoient rangés dans les lignes $M\mu$, je dis que le nombre de ces Cercles ſera égal à l'eſpace $\frac{BbAcC}{Mm^2}$, & que par conſéquent leur maſſe ſera égale à $\frac{p.Dd.BC}{4}$.

Si BAC étoit un ſolide de révolution couvert de boules, le nombre des boules ſeroit égal à $\frac{p.BC^2.Dd}{4\,Mm^3}$, & leur ſolidité égale à $\frac{p.Mm^3.p.BC^2.Dd}{6.4\,Mm^3} = \frac{pp.Dd.BC^2}{24}$.

PROBLÊME

PROBLÊME I.

233. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*article 229, *avec cette condition de plus, qu'on imprime à la figure* BAC (Fig. 72.) *une certaine vîteſſe; trouver la vîteſſe qu'elle communiquera à toutes les boules qu'elle touche, & la vîteſſe qu'elle conſervera après le choc.*

Soit m la maſſe de la figure BAC, u la vîteſſe qu'elle a reçue par l'impulſion, v la vîteſſe qu'elle conſervera après le choc, $Mm = ds$, $PM = y$, $mn = dy$; il eſt conſtant que la vîteſſe de la petite maſſe circulaire qui eſt en M, ſera $\frac{v \times dy}{ds}$, & l'on aura par les *art.* 50 & 143 du Traité de Dynamique, 1re Edition, ou 60 & 174, 2e Edition. $m(u - v) = 2\int(\frac{p.ds^2.vdy^2}{4.ds^2}) = 2\int(\frac{\alpha.p.ds^2}{4ds} \times \frac{vdy^2}{\alpha ds}) = 2Mv\int\frac{dy^2}{\alpha ds}$, en nommant M la ſomme des Cercles qui couvrent BAC.

COROLLAIRE I.

234. Si la figure BAC eſt une portion de Cercle, dont le diamétre ſoit $2a$, on a $\int\frac{dy^2}{ds} = \int\frac{dy\sqrt{[aa-yy]}}{a} = \frac{aa}{4a} + \frac{DC.\sqrt{[aa-DC^2]}}{2a}$.

Donc ſi la figure BAC eſt un demi-Cercle entier, on aura $v = \frac{2mu}{M+2m}$; donc $\frac{Mu}{M+2m}$ ſera la vîteſſe perdue par le Corps BAC.

COROL. II.

235. Donc si les petits Corps S sont élastiques, $u - \frac{2Mu}{M+2m}$ ou $\frac{2mu-Mu}{M+2m}$ sera la vîtesse de la figure. Ce qui s'accorde avec la formule donnée par M. *Bernoulli*, sans démonstration dans son discours sur le mouvement.

COROL. III

236. Si la figure est un solide de révolution, on aura $m(u-v) = 2v\int(\frac{p.ds^3}{6} \times \frac{py}{ds} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = 2v\int\frac{p.a.ds^3}{6.ds^2} \times \frac{pydy^2}{ads} = \frac{2Mv.p}{a} \times \int\frac{ydy^2}{ds}$.

COROL. IV.

237. Si BAC est un demi-Cercle, on aura $\frac{ydy^2}{ds} = \frac{aa}{3}$; $a = 2paa$; & $m(u-v) = \frac{Mv}{3}$.

COROL. V.

238. Si l'espace dans lequel le solide de révolution BAC (Fig. 73.) est supposé se mouvoir, est rempli de petites boules, disposées entr'elles comme on l'a supposé dans l'*art.* 232, il est évident, que tandis que la figure se meut de BAC en bac, elle choque un certain nombre de couches de ces petites masses circulaires. Or si on suppose que chaque couche immédiatement contigue à la figure BAC, s'anéantit à mesure que cette figure

lui communique du mouvement; il eſt conſtant qu'en nommant Dd, dx, le point M rencontrera un nombre de Corps égal à $\frac{dx\,dy}{ds^2}$; d'où il s'enſuit que $m(u-v)$ ſera égal à $2v\int(\frac{p.ds^3}{6}\times\frac{dx\,dy}{ds^2}\times\frac{py}{ds}\times\frac{dy^2}{ds^2})$. Donc en faiſant $u-v=-du$, on trouvera l'Equation ſuivante:

$-m\,du=\frac{ppudx}{6}\int\frac{y\,dy^3}{ds^2}$: & ſi BAC étoit une figure plane, on auroit

$$m(u-v)=2v\int\frac{p\,ds^2}{4}\times\frac{dx\,dy}{ds^2}\times\frac{dy^2}{ds^2},$$

&

$$-m\,du=\frac{p\,udx}{2}\int\frac{dy^3}{ds^2}.$$

COROLLAIRE VI.

239. Il eſt à remarquer que dans le cas dont nous venons de parler dans l'article précédent, la denſité du Corps BAC eſt à celle de l'eſpace rempli par les petites boules, comme $\frac{p.Dd.BC^2}{4}$ à $\frac{pp.Dd.BC^2}{24}$ (*art.* 232) c'eſt-à-dire, comme 6 eſt à p. Or ſi la denſité de l'eſpace rempli par les petites boules diminue ou augmente, la quantité $m\,du$ qui exprime la perte du mouvement faite à chaque inſtant par le ſolide BAC, diminuera ou augmentera en même raiſon, ce qui eſt évident; donc ſi on nomme en général Δ le rapport des denſités du Fluide & du Corps, on aura

$$-mdu = 2\delta u dx \int \frac{y dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (A)$$

& ſi BAC eſt une figure plane

$$-mdu = 2\delta u dx \int \frac{dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (B).$$

COROL. VII.

240. On peut déduire du Corollaire précédent les Loix de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps. Car conſidérant un Fluide comme compoſé d'une infinité de petites boules, on auroit par les formules du Corollaire précédent la réſiſtance d'un Fluide au mouvement d'un Corps, dont la denſité ſeroit à celle du Fluide, comme 1 à δ, & ſi les boules étoient élaſtiques, la vîteſſe perdue dans un tems donné ſeroit double de la vîteſſe perdue dans la formule précédente.

Donc ſi on imagine un Cylindre de Fluide dont la hauteur ſoit C, dont la baſe ſoit la même que celle du Conoïde BAC, & qui ſoit égale en maſſe à ce Conoïde, on aura $p . DC^2 \times C \times \delta = m$, & par conſéquent $-C \times DC^2 . du = 2udx \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt ſans reſſort, & $-C . DC^2 . du = 4udx \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt élaſtique. Donc ſuppoſant que u ſoit à la vîteſſe initiale comme 1 à n, & prenant la Soutangente de la Logarithmique des tables égale à 4342945, on aura..... $x = (C . DC^2 \times \log . n) : 8685890 \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt ſans reſſort, &

$x = (C.DC^2 \times \log. n) : 17371780 \int \frac{y\,dy}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt à reſſort. Ce qui s'accorde avec les formules données ſans démonſtration par M. *Bernoulli* dans ſon diſcours ſur le mouvement.

REMARQUE I.

241. Nous avons ſuppoſé dans le Problême précédent, que les petits Corpuſcules *S* étoient rangées ſur la circonférence *BAC* qu'ils couvroient entiérement; mais ſi on ſuppoſoit qu'ils fuſſent rangés ſur cette circonférence, à peu près comme on le voit dans la Figure 74, de façon que la ſomme de leurs diamétres fût égale, non plus à *BAC*, mais à *BDC*, & que les centres des Corpuſcules qui forment les différentes couches fuſſent rangés, non dans les lignes perpendiculaires à *BAC*, comme dans l'*article* 232, mais dans des lignes parallèles à l'Axe, je dis qu'on arriveroit toujours en ce cas aux mêmes formules qui ont été données dans l'*art.* 239, comme il eſt aiſé de le faire voir. En effet, on auroit pour lors $-m\,du = 2u \int (\frac{p\,dy^3}{6} \times \frac{dx}{dy} \times \frac{py}{dy} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = \frac{ppu\,dx}{3} \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$: or la denſité du Fluide eſt alors à celle du Corps :: $p.dy^3 \times \frac{BC^2.dx}{24\,dy^3}$ eſt à $\frac{BC^2.dx}{4}$; c'eſt-à-dire, comme p eſt à 6, d'où l'on tirera la même formule générale, que dans l'*art.* 239, pour la réſiſtance d'un Corps dans un Fluide, dont la denſité eſt donnée.

Nous pouvons donc regarder en général les formules *A* & *B* de l'*art.* 239, comme les véritables formules de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps, en ſuppoſant les Fluides compoſés de petits Corps circulaires.

Si on ſuppoſoit qu'une partie ſeulement des Globules du Fluide fut rangée autour du Corps *BAC* (Fig. 74.) de la maniere qui eſt expliquée dans l'*article* préſent, & que l'autre partie de ces mêmes Globules fut rangée de la maniere expliquée *article* 232, on trouveroit encore les mêmes formules : d'où il s'enſuit qu'en général l'action du Fluide ſur un Arc quelconque de la courbe *BAC* eſt la même, ſoit que les Globules ſoient diſpoſés ſur cet Arc comme dans l'*article* préſent, ſoit qu'ils ſoient diſpoſés comme dans l'*article* 232. On peut donc conclure de-là, que la réſiſtance du Fluide eſt toujours la même, toutes choſes d'ailleurs égales, quelque arrangement qu'on ſuppoſe dans ſes parties.

On voit auſſi par tout ce qui précéde, que le diamétre plus ou moins grand des Globules, ne change rien à la réſiſtance, pourvû que la denſité des Globules ſoit la même ; ce qui peut dailleurs ſe concevoir aiſément. Car imaginons un eſpace cubique plein de Globules qui ſe touchent, & dont le diamétre ſoit δ, $p\delta^2$ ſera la ſurface de chacun de ces Globules, $\frac{p\delta^3}{6}$ leur ſolidité, ou plutôt leur volume ; & leur nombre ſera égal à $\frac{D^3}{\delta^3}$, en nommant D une des dimenſions de l'eſpace

cubique, où ils ſont renfermés ; donc le volume total de la ſomme de ces Globules ſera $\frac{p\delta^3}{6} \times \frac{D^3}{\delta^3} = \frac{pD^3}{6}$, quantité indépendante de la valeur de δ. Ainſi en parcourant le même petit eſpace, le corps choquant frappera toujours la même quantité de maſſe Fluide, & par conſéquent perdra la même quantité de mouvement.

On peut remarquer en paſſant, que la ſolidité de la ſomme des Globules qui rempliſſent l'eſpace cubique, quel que ſoit leur diamétre, eſt la même que celle d'un globe unique qui auroit la même denſité que ces Globules, & pour diamétre D.

Remarque II.

242. On peut encore arriver aux formules A & B de l'*article* 239, ſans ſuppoſer que les particules du Fluide ſoient de petits Corpuſcules circulaires.

Pour le faire voir, imaginons (*art.* 232.) que nds^2 ſoit la maſſe d'un des petits Corpuſcules, & $\frac{dxdy}{dsds}$ le nombre de ces Corpuſcules rangés dans la ligne $M\mu$ (Fig. 73); leur nombre total ſera égal à $\frac{BbacC}{dsds}$, & leur ſomme égale à $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds}$; l'on trouvera pour lors que $-mdu = 2u\int(nds^2 \times \frac{dxdy}{dsds} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = \frac{2nudx.ds}{ds} \times \int\frac{dy^3}{ds^2}$.

Or dans ce cas-ci, la denſité du Fluide eſt à celle du

Corps :: $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds}$: $BC.dx$, c'eſt-à-dire, comme nds à ds. De-là on tirera en général pour les deux cas, où BAC eſt une figure plane ou un ſolide de révolution, les mêmes formules A & B que dans l'*article* 239.

REMARQUE III.

243. Les formules que nous avons données dans l'*article* 239, ont été déduites de la ſuppoſition que chaque couche s'anéantiſſoit à meſure qu'elle faiſoit perdre au Corps ſolide une partie de ſon mouvement; ou, ce qui revient au même, que le mouvement imprimé à cette couche, ne ſe communiquoit point aux couches voiſines. D'où il s'enſuit, que pour pouvoir appliquer nos formules au mouvement des Fluides, il faut ſuppoſer que les petites particules du Fluide ſont éloignées les unes des autres, & que le Fluide n'eſt pas infiniment comprimé. Dans cette derniere hypothèſe, l'action de la couche immédiatement contigue au Corps BAC ſur les couches voiſines, ne doit pas apporter un grand changement dans nos formules. Car 1°. ſi le Fluide eſt ſans reſſort, la couche contigue au Corps BAC ſe meut avec lui en ne faiſant qu'une ſeule maſſe, & la couche ſuivante eſt frappée par conſéquent de la même maniere par le Corps BAC, & reçoit le même mouvement, que ſi on n'avoit plus d'égard à la premiere couche. 2°. Si le Fluide eſt élaſtique, la premiere couche communique à la ſeconde tout le mouvement qu'elle a reçu, & ainſi la premiere couche

PROBLÊME I.

233. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*article 229, *avec cette condition de plus, qu'on imprime à la figure* BAC (Fig. 72.) *une certaine vîteſſe; trouver la vîteſſe qu'elle communiquera à toutes les boules qu'elle touche, & la vîteſſe qu'elle conſervera après le choc.*

Soit m la maſſe de la figure BAC, u la vîteſſe qu'elle a reçue par l'impulſion, v la vîteſſe qu'elle conſervera après le choc, $Mm = ds$, $PM = y$, $mn = dy$; il eſt conſtant que la vîteſſe de la petite maſſe circulaire qui eſt en M, ſera $\frac{v \times dy}{ds}$, & l'on aura par les *art.* 50 & 143 du Traité de Dynamique, 1re Edition, ou 60 & 174, 2e Edition. $m(u - v) = 2\int(\frac{p.ds^2.vdy^2}{4.ds^2}) = 2\int(\frac{\alpha.p.ds^2}{4ds} \times \frac{vdy^2}{\alpha ds}) = 2Mv\int\frac{dy^2}{\alpha ds}$, en nommant M la ſomme des Cercles qui couvrent BAC.

COROLLAIRE I.

234. Si la figure BAC eſt une portion de Cercle, dont le diamétre ſoit $2a$, on a $\int\frac{dy^2}{ds} = \int\frac{dy\sqrt{[aa-yy]}}{a} = \frac{aa}{4a} + \frac{DC.\sqrt{[aa-DC^2]}}{2a}$.

Donc ſi la figure BAC eſt un demi-Cercle entier, on aura $v = \frac{2mu}{M+2m}$; donc $\frac{Mu}{M+2m}$ ſera la vîteſſe perdue par le Corps BAC.

COROL. II.

235. Donc si les petits Corps S sont élastiques, $u - \frac{2Mu}{M+2m}$ ou $\frac{2mu-Mu}{M+2m}$ sera la vîtesse de la figure. Ce qui s'accorde avec la formule donnée par M. *Bernoulli*, sans démonstration dans son discours sur le mouvement.

COROL. III

236. Si la figure est un solide de révolution, on aura $m(u-v) = 2v\int(\frac{p.ds^3}{6} \times \frac{py}{ds} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = 2v\int\frac{p.a.ds^3}{6.ds^2} \times \frac{pydy^2}{ads} = \frac{2Mv.p}{a} \times \int\frac{ydy^2}{ds}$.

COROL. IV.

237. Si BAC est un demi-Cercle, on aura $\frac{ydy^2}{ds} = \frac{aa}{3}$; $a = 2paa$; & $m(u-v) = \frac{Mv}{3}$.

COROL. V.

238. Si l'espace dans lequel le solide de révolution BAC (Fig. 73.) est supposé se mouvoir, est rempli de petites boules, disposées entr'elles comme on l'a supposé dans l'*art.* 232, il est évident, que tandis que la figure se meut de BAC en bac, elle choque un certain nombre de couches de ces petites masses circulaires. Or si on suppose que chaque couche immédiatement contigue à la figure BAC, s'anéantit à mesure que cette figure

lui communique du mouvement; il eſt conſtant qu'en nommant Dd, dx, le point M rencontrera un nombre de Corps égal à $\frac{dxdy}{ds^2}$; d'où il s'enſuit que $m(u-v)$ ſera égal à $2v\int(\frac{p.ds^3}{6}\times\frac{dxdy}{ds^2}\times\frac{py}{ds}\times\frac{dy^2}{ds^2})$. Donc en faiſant $u-v=-du$, on trouvera l'Equation ſuivante: $-mdu=\frac{ppudx}{6}\int\frac{ydy^3}{ds^2}$: & ſi BAC étoit une figure plane, on auroit

$$m(u-v)=2v\int\frac{pds^2}{4}\times\frac{dxdy}{ds^2}\times\frac{dy^2}{ds^2},$$

&

$$-mdu=\frac{pudx}{2}\int\frac{dy^3}{ds^2}.$$

COROLLAIRE VI.

239. Il eſt à remarquer que dans le cas dont nous venons de parler dans l'article précédent, la denſité du Corps BAC eſt à celle de l'eſpace rempli par les petites boules, comme $\frac{p.Dd.BC^2}{4}$ à $\frac{pp.Dd.BC^2}{24}$ (*art.* 232) c'eſt-à-dire, comme 6 eſt à p. Or ſi la denſité de l'eſpace rempli par les petites boules diminue ou augmente, la quantité mdu qui exprime la perte du mouvement faite à chaque inſtant par le ſolide BAC, diminuera ou augmentera en même raiſon, ce qui eſt évident; donc ſi on nomme en général Δ le rapport des denſités du Fluide & du Corps, on aura

$$-mdu = 2\delta u dx \int \frac{y dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (A)$$

& ſi BAC eſt une figure plane

$$-mdu = 2\delta u dx \int \frac{dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (B).$$

COROL. VII.

240. On peut déduire du Corollaire précédent les Loix de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps. Car conſidérant un Fluide comme compoſé d'une infinité de petites boules, on auroit par les formules du Corollaire précédent la réſiſtance d'un Fluide au mouvement d'un Corps, dont la denſité ſeroit à celle du Fluide, comme 1 à δ, & ſi les boules étoient élaſtiques, la vîteſſe perdue dans un tems donné ſeroit double de la vîteſſe perdue dans la formule précédente.

Donc ſi on imagine un Cylindre de Fluide dont la hauteur ſoit C, dont la baſe ſoit la même que celle du Conoïde BAC, & qui ſoit égale en maſſe à ce Conoïde, on aura $p . DC^2 \times C \times \delta = m$, & par conſéquent $-C \times DC^2 . du = 2udx \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt ſans reſſort, & $-C . DC^2 . du = 4udx \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt élaſtique. Donc ſuppoſant que u ſoit à la vîteſſe initiale comme 1 à n, & prenant la Soutangente de la Logarithmique des tables égale à 4342945, on aura ..... $x = (C . DC^2 \times \log. n) : 8685890 \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt ſans reſſort, &

$x = (C.DC^2 \times \log. n) : 17371780 \int \frac{y\,dy}{ds^2}$ lorſque le Fluide eſt à reſſort. Ce qui s'accorde avec les formules données ſans démonſtration par M. *Bernoulli* dans ſon diſcours ſur le mouvement.

REMARQUE I.

241. Nous avons ſuppoſé dans le Problême précédent, que les petits Corpuſcules *S* étoient rangées ſur la circonférence *BAC* qu'ils couvroient entiérement; mais ſi on ſuppoſoit qu'ils fuſſent rangés ſur cette circonférence, à peu près comme on le voit dans la Figure 74, de façon que la ſomme de leurs diamétres fût égale, non plus à *BAC*, mais à *BDC*, & que les centres des Corpuſcules qui forment les différentes couches fuſſent rangés, non dans les lignes perpendiculaires à *BAC*, comme dans l'*article* 232, mais dans des lignes parallèles à l'Axe, je dis qu'on arriveroit toujours en ce cas aux mêmes formules qui ont été données dans l'*art.* 239, comme il eſt aiſé de le faire voir. En effet, on auroit pour lors $-m\,du = 2u \int (\frac{p\,dy^3}{6} \times \frac{dx}{dy} \times \frac{py}{dy} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = \frac{ppu\,dx}{3} \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$: or la denſité du Fluide eſt alors à celle du Corps :: $p.dy^3 \times \frac{BC^2.dx}{24\,dy^3}$ eſt à $\frac{BC^2.dx}{4}$; c'eſt-à-dire, comme p eſt à 6, d'où l'on tirera la même formule générale, que dans l'*art.* 239, pour la réſiſtance d'un Corps dans un Fluide, dont la denſité eſt donnée.

Nous pouvons donc regarder en général les formules *A* & *B* de l'*art.* 239, comme les véritables formules de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps, en ſuppoſant les Fluides compoſés de petits Corps circulaires.

Si on ſuppoſoit qu'une partie ſeulement des Globules du Fluide fut rangée autour du Corps *BAC* (Fig. 74.) de la maniere qui eſt expliquée dans l'*article* préſent, & que l'autre partie de ces mêmes Globules fut rangée de la maniere expliquée *article* 232, on trouveroit encore les mêmes formules : d'où il s'enſuit qu'en général l'action du Fluide ſur un Arc quelconque de la courbe *BAC* eſt la même, ſoit que les Globules ſoient diſpoſés ſur cet Arc comme dans l'*article* préſent, ſoit qu'ils ſoient diſpoſés comme dans l'*article* 232. On peut donc conclure de-là, que la réſiſtance du Fluide eſt toujours la même, toutes choſes d'ailleurs égales, quelque arrangement qu'on ſuppoſe dans ſes parties.

On voit auſſi par tout ce qui précéde, que le diamétre plus ou moins grand des Globules, ne change rien à la réſiſtance, pourvû que la denſité des Globules ſoit la même ; ce qui peut dailleurs ſe concevoir aiſément. Car imaginons un eſpace cubique plein de Globules qui ſe touchent, & dont le diamétre ſoit δ, $p\delta^2$ ſera la ſurface de chacun de ces Globules, $\frac{p\delta^3}{6}$ leur ſolidité, ou plutôt leur volume ; & leur nombre ſera égal à $\frac{D^3}{\delta^3}$, en nommant D une des dimenſions de l'eſpace

cubique, où ils ſont renfermés ; donc le volume total de la ſomme de ces Globules ſera $\frac{p\delta^3}{6} \times \frac{D^3}{\delta^3} = \frac{pD^3}{6}$, quantité indépendante de la valeur de δ. Ainſi en parcourant le même petit eſpace, le corps choquant frappera toujours la même quantité de maſſe Fluide, & par conſéquent perdra la même quantité de mouvement.

On peut remarquer en paſſant, que la ſolidité de la ſomme des Globules qui rempliſſent l'eſpace cubique, quel que ſoit leur diamétre, eſt la même que celle d'un globe unique qui auroit la même denſité que ces Globules, & pour diamétre D.

Remarque II.

242. On peut encore arriver aux formules A & B de l'*article* 239, ſans ſuppoſer que les particules du Fluide ſoient de petits Corpuſcules circulaires.

Pour le faire voir, imaginons (*art.* 232.) que nds^2 ſoit la maſſe d'un des petits Corpuſcules, & $\frac{dxdy}{dsds}$ le nombre de ces Corpuſcules rangés dans la ligne $M\mu$ (Fig. 73); leur nombre total ſera égal à $\frac{BbacC}{dsds}$, & leur ſomme égale à $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds}$; l'on trouvera pour lors que $-mdu = 2u\int(nds^2 \times \frac{dxdy}{dsds} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = \frac{2nudx.ds}{ds} \times \int\frac{dy^3}{ds^2}$.

Or dans ce cas-ci, la denſité du Fluide eſt à celle du

Corps :: $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds}$: $BC.dx$, c'eſt-à-dire, comme nds à ds. De-là on tirera en général pour les deux cas, où BAC eſt une figure plane ou un ſolide de révolution, les mêmes formules A & B que dans l'*article 239*.

REMARQUE III.

243. Les formules que nous avons données dans l'*article 239*, ont été déduites de la ſuppoſition que chaque couche s'anéantiſſoit à meſure qu'elle faiſoit perdre au Corps ſolide une partie de ſon mouvement; ou, ce qui revient au même, que le mouvement imprimé à cette couche, ne ſe communiquoit point aux couches voiſines. D'où il s'enſuit, que pour pouvoir appliquer nos formules au mouvement des Fluides, il faut ſuppoſer que les petites particules du Fluide ſont éloignées les unes des autres, & que le Fluide n'eſt pas infiniment comprimé. Dans cette derniere hypothèſe, l'action de la couche immédiatement contigue au Corps BAC ſur les couches voiſines, ne doit pas apporter un grand changement dans nos formules. Car 1°. ſi le Fluide eſt ſans reſſort, la couche contigue au Corps BAC ſe meut avec lui en ne faiſant qu'une ſeule maſſe, & la couche ſuivante eſt frappée par conſéquent de la même maniere par le Corps BAC, & reçoit le même mouvement, que ſi on n'avoit plus d'égard à la premiere couche. 2°. Si le Fluide eſt élaſtique, la premiere couche communique à la ſeconde tout le mouvement qu'elle a reçu, & ainſi la premiere couche

couche eſt de nouveau frappée par le Corps *BAC*, comme ſi c'étoit une couche nouvelle.

Il faut remarquer encore que les particules du Fluide pouſſées & miſes en mouvement par le Corps qui les rencontre, ne continuent pas leur chemin en ligne droite, mais qu'elles ſe replient pour venir occuper par derriere l'eſpace que le Corps laiſſe vuide, & forment ainſi autour de lui une eſpéce de Tourbillon : or on ne peut imaginer la formation de ce Tourbillon, ſur-tout lorſque le Fluide eſt fort comprimé, qu'en ſuppoſant que le Corps *BAC* agiſſe non-ſeulement ſur la couche qui le touche immédiatement, mais auſſi ſur les couches qui ſont ſituées plus loin, juſqu'à une certaine diſtance plus grande ou plus petite ; enſorte qu'il pouſſe, par exemple, à-la-fois tous les Corpuſcules contenus dans l'eſpace *BbacC*, & que tandis que le Corps *BAC* parvient de *D* en *d*, ces Corpuſcules qui trouvent derriere le Corps un eſpace vuide, viennent remplir cet eſpace, ou du moins agiſſent latéralement en vertu de la vîteſſe qui leur eſt imprimée, pour forcer les parties voiſines à venir remplir cet eſpace. Or que le Corps *BAC* agiſſe, ou tout-à-la-fois, ou ſucceſſivement ſur les Corpuſcules qui rempliſſent l'eſpace *BbacC* ; il eſt aiſé de voir que la perte de vîteſſe qu'il ſera en parcourant l'eſpace *Dd* ſera la même dans l'un & l'autre cas. Donc, &c.

REMARQUE IV.

244. Le Tourbillon dont nous venons de parler dans

l'article précédent, eſt principalement ſenſible lorſque c'eſt le Fluide qui frappe le Corps & qui lui imprime du mouvement. Or on peut toujours imaginer, que c'eſt le Fluide qui frappe le Corps. Car pour cela il ſuffit de concevoir que le ſyſtême total du Corps & des parties du Fluide ſoit mû dans un ſens contraire à celui du Corps, avec une vîteſſe variable égale à celle qu'a le Corps à chaque inſtant : il eſt conſtant que le Corps reſtera en repos dans l'eſpace abſolu, ſans que l'action du Fluide ſur le Corps ſoit changée. D'où il s'enſuit qu'en général, pour déterminer la réſiſtance d'un Fluide à un Corps ſolide qui s'y meut, on peut ſuppoſer avec M. *Newton*, que le Corps ſoit en repos, & que les particules du Fluide viennent le frapper avec une vîteſſe égale à celle que le Corps doit avoir. D'après ce Principe, on démontrera facilement une propoſition qu'on trouve dans pluſieurs Ouvrages, ſavoir que l'action du Fluide contre la circonférence BAC eſt à ſon action ſur la baſe BC, comme $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ à DC, & que ſi BAC eſt un ſolide de révolution, l'action du Fluide ſur la ſurface courbe BAC eſt à ſon action ſur la baſe, comme $\int \frac{2ydy^3}{ds^2}$ à CD^2. Cette régle me paroît d'autant plus recevable, 1°. qu'elle s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit juſqu'ici ſur la réſiſtance des Fluides, & particuliérement avec nos formules de l'*art.* 239. 2°. Que M. *Daniel Bernoulli*, celui de tous les Géométres qui s'eſt écarté le plus ſur cette ma-

tiere des idées communes, a donné dans un excellent Mémoire imprimé dans le *Tome* 8 *de Peterſbourg*, des formules pour évaluer l'action d'un Fluide contre une ſurface plane, deſquelles il réſulte que l'action d'une maſſe de Fluide donnée, qui frappe une ſurface plane avec une vîteſſe donnée, eſt en raiſon du Sinus d'incidence, au moins lorſqu'on peut ſuppoſer que le Fluide, après avoir frappé cette ſurface, s'écoule vers un ſeul côté, non vers deux côtés à-la-fois. Or c'eſt ce qu'on doit néceſſairement ſuppoſer, quand un Corps ſolide eſt expoſé au courant d'un Fluide. Car toutes les particules qui viennent frapper, par exemple, la partie *AC* (Fig. 72.) s'écoulent de *A* vers *C*, comme ſur un plan incliné.

Je crois donc que dans la Théorie, & abſtraction faite de la tenacité des Fluides, la régle que nous venons d'établir eſt aſſez exacte. Il ne nous reſte plus qu'à déterminer la valeur abſolue de l'action d'un Fluide contre une ſurface plane. C'eſt ce qu'il eſt difficile de déterminer; car les Auteurs ſont fort partagés là-deſſus: M. *Daniel Bernoulli*, dans ſon Mémoire que nous venons de citer, la fait double de M. *Newton* dans ſes Principes, & de M. *Jean Bernoulli* dans l'*art.* XXVI de ſon Hydraulique. Je vais, avant de finir ce Chapitre, expoſer en peu de mots ce que je penſe ſur ce ſujet.

PROBLÊME II.

245. OHNK (Fig. 75.) *eſt un Canal, dans lequel un Fluide, ſuppoſé ſans peſanteur, coule avec une vîteſſe uni-*

forme, & BAC *eſt un ſolide fixe & immobile au milieu de ce Canal; on demande l'action du Fluide ſur ce ſolide.*

Comme le Fluide, obligé de couler dans un eſpace plus étroit lorſqu'il rencontre le Corps BAC, ſe meut alors plus vîte, il exerce néceſſairement ſur le Corps BAC une certaine preſſion : c'eſt cette preſſion qu'il s'agit de déterminer.

Soit $AG = a$, DP ou $KQ = x$, $PM = y$, on aura $QM = a - y$, & ſi on appelle u la vîteſſe de AG, on aura celle de $QM = \frac{ua}{a-y}$, & la preſſion contre un point quelconque M, ſera $\int \frac{dx}{dt} \times d\left(\frac{-ua}{a-y}\right)$; je mets $-\frac{ua}{a-y}$, parce que la preſſion du Fluide s'exerce ici dans un ſens contraire à la direction de la vîteſſe, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir; on aura donc en ſuppoſant $(a-y) \times dx$ conſtant, la preſſion égale à $\frac{(a-y)dx}{dt} \int \frac{-dy \cdot ua}{(a-y)^3}$. Or comme la preſſion s'exerce de K vers N, elle doit être nulle lorſque $x = 0$, c'eſt-à-dire, lorſque $y = CK$; donc $\int \frac{-dy}{(a-y)^3} = \frac{-1}{2QM^2} + \frac{1}{2CK^2}$; donc mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx(a-y)}{au}$, la preſſion en M ſera $= \int \frac{-u^2 a^2 dy}{(a-y)^3} = \frac{u^2}{2}\left(\frac{AG^2}{CK^2} - \frac{AG^2}{QM^2}\right)$. Donc (en nommant φ la preſſion en M) l'effet de cette preſſion pour pouſſer

le Corps parallèlement à AD, ſera $\varphi\, ds \times \frac{-dy}{ds}$, Mm étant $= ds$. Donc la preſſion totale ſur CM ſera $= \int -\varphi\, dy = \frac{uua^2}{2}\left(\int \frac{-dy}{CK^2}\,\frac{+dy}{(a-y)^2}\right) = \frac{u^2a^2}{2}\left(\frac{1}{a-y} - \frac{y}{CK^2} - \frac{1}{CK} + \frac{DC}{CK^2}\right)$ afin que la preſſion ſoit $= 0$, lorſque $y = DC$. Donc en faiſant $y = 0$, la preſſion totale ſur l'Arc entier BAC ou $2CA$, ſera $2\,\frac{u^2a^2}{2} \times \left(\frac{1}{a} + \frac{DC-CK}{CK^2}\right) = u^2a^2\left(\frac{1}{a} + \frac{a-2CK}{CK^2}\right) = u^2a \times \left(\frac{CD^2}{CK^2}\right)$.

REMARQUE I.

246. Nous avons ſuppoſé dans la ſolution du Problême précédent, que le ſolide BAC étoit immobile; mais ſi on ſuppoſe qu'il puiſſe ſe mouvoir, & qu'il ſe meuve en effet, voici comment on déterminera l'action du Fluide ſur lui dans un inſtant quelconque. On imaginera, que tandis que le point A parvient en a (Fig. 76), LG parvient en $\lambda\gamma$; & ayant tiré par un point quelconque M la ligne Mm égale & parallèle à Aa, il eſt évident que l'on aura $gamq = GAMQ$. Donc ſi on fait $qm\mu k = ga\mathfrak{G}\gamma$, on aura $\gamma\mathfrak{G}\mu k = GAMQ$. D'où l'on voit, que tandis que AG parvient en $\mathfrak{G}\gamma$, MQ parvient en μk, & que la vîteſſe d'une tranche quelconque QM eſt égale à la vîteſſe Aa du Corps BAC, plus à la vîteſſe qu'auroit

cette même tranche, si le Corps BAC supposé immobile étoit frappé par le Fluide avec une vîtesse $= aa$. Donc nommant v la vîtesse du Corps, on aura l'action du Fluide sur le Corps, en mettant $u - v$ pour u dans les formules de l'article précédent.

Remarque II.

247. Au reste, l'action que nous venons de déterminer dans ce Problême, n'est que l'action du Fluide qui provient de ce qu'il est obligé de passer dans un espace plus étroit : il faut de plus, ajouter à cette action celle qui provient de l'impulsion réelle du Fluide sur le Corps; & cette considération est d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas où l'effort déterminé dans le présent Problême est nul, comme quand le solide est formé par une courbe ovale & rentrante en elle-même, ainsi qu'on le voit Figure 77. Car alors la pression qui s'exerce sur la partie BAC est de A vers B, & celle qui s'exerce sur la partie BbC, est de b vers A, & de même valeur; comme il résulte évidemment des calculs de l'*art.* 245.

Je crois néanmoins que si l'Axe Ab de cette courbe est très-petit par rapport à l'autre Axe BC, on peut regarder l'action totale du Fluide sur le Corps, comme égale à la pression que souffre la seule partie BAC. Car 1°. comme on ne peut pas supposer alors que les particules du Fluide viennent toutes frapper le Corps BAC les unes après les autres, la partie de l'action du Fluide, qui provient de ce qu'il est obligé de se détourner & de passer dans un

eſpace plus étroit, eſt celle qui produit alors l'effet le plus conſidérable & le plus ſenſible. 2°. Cette action ne ſauroit être détruite par la preſſion du Fluide contre la partie BbC, parce que les parties du Fluide qui ont frappé la partie BAC, ne peuvent pas aiſément ſe replier ſur la partie BbC, ſi cette partie a peu de hauteur par rapport à ſa largeur, & qu'ainſi il doit reſter alors derriere la partie BbC un eſpace aſſez conſidérable, dans lequel le Fluide eſt comme ſtagnant. Ainſi la preſſion que ſouffre la partie BbC ne peut être alors que très-petite.

REMARQUE III.

248. Si le Canal $LGKH$ (Fig. 75.) eſt d'une largeur infinie, alors CD eſt infiniment petite par rapport à AG & à CK, qu'on peut regarder comme égale à AG, & l'effort de la preſſion eſt $= \frac{u^2 CD^2}{a}$, c'eſt-à-dire, infiniment petit.

On pourroit ſuppoſer néanmoins, & l'expérience n'y eſt pas contraire, que quand le Canal eſt infini en largeur, il n'y a qu'une certaine portion du Fluide, voiſine du Corps, qui s'accélére à ſa rencontre, & que cette portion eſt d'autant plus grande que la baſe BC eſt plus large; de maniere que quand un Corps BAC eſt expoſé au courant d'un Fluide indéfini, on peut imaginer que l'action du Fluide ſur lui, eſt la même que s'il étoit poſé dans un Canal dont la largeur LG fût avec BC dans un certain rapport.

COROLLAIRE.

249. On pourroit eſſayer de déterminer par ce moyen l'action d'un Fluide ſur une ſurface plane BC. Car ſuppoſant l'Axe AD infiniment petit, & $CK^2 = 2a \times CD$, on auroit $uu.BC$ pour la valeur de l'effort cherché ſur la moitié de la ſurface, & par conſéquent $uu.BC$ pour l'effort total, ou (en ſuppoſant $uu = 2p.b$) $p.b.BC$, c'eſt-à-dire, égale au poids d'un Cylindre dont BC ſeroit la baſe, & dont la hauteur ſeroit la hauteur b dûe à la vîteſſe u du Fluide. Ce qui s'accorde avec ce que M. *Newton* a trouvé par une voie fort différente.

Si on ſuppoſoit $CK^2 = a \times DC$, on auroit une expreſſion double de celle de M. *Newton*, & conforme à celle qu'a donnée M. *Daniel Bernoulli* dans ſon Mémoire déja cité, *Tom.* 8 *des Mém. de Peterſbourg.*

Au reſte, nous avons expoſé dans notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides* (Chap. VII.) quelques difficultés qu'il nous paroît qu'on peut faire contre la Théorie de M. *Bernoulli* ſur ce ſujet; & nous avons donné en même-temps une Méthode qui nous paroît plus exacte, & conforme d'ailleurs à l'expérience, pour déterminer l'action qu'un Fluide ſortant d'un vaſe, exerce contre une ſurface plane qu'il rencontre. Nous y renvoyons le Lecteur.

De l'action qu'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe, exerce contre ce vaſe.

250. Nous avons parlé ci-deſſus de la preſſion qu'un Fluide qui ſe meut dans un vaſe, exerce contre ce vaſe:

ſe: il eſt queſtion ici de l'impulſion que ce vaſe, conſidéré comme un Corps dont la maſſe eſt donnée, reçoit du Fluide: ce qui a un rapport immédiat à la matiere que nous traitons ici.

La ſolution de ce Problême ſe déduit aiſément de celle du Problême que nous avons donné *art.* 152, il ſuffit pour cela de ſuppoſer dans ce dernier Problême (*art.* 152), que le vaſe lui-même eſt le poids que le Fluide tend à mouvoir, & employer les mêmes Principes dont nous nous ſommes ſervis dans l'article cité.

Au reſte, outre l'action par laquelle le Fluide tend à faire deſcendre le vaſe, Meſſieurs *Jean* & *Daniel Bernoulli*, en admettant encore une autre, qu'ils prétendent ſe manifeſter par l'Expérience, & qu'ils appellent *force repouſſante*. Selon eux, un Fluide qui ſort d'un vaſe Cylindrique, par exemple, par une ouverture verticale, agit en même-tems contre l'endroit du vaſe directement oppoſé à cette ouverture, & tend à mouvoir le vaſe horizontalement dans un ſens contraire à celui dont le Fluide ſe meut. Mais j'avoue que la Théorie que ces deux ſavans Géométres ont donnée ſur ce ſujet, ne me paroît pas donner une idée claire de la nature de cette force. Auſſi ne s'accordent-ils point du tout ſur ſa meſure, puiſque l'un la fait double de l'autre.

Je conçois, il eſt vrai, d'après quelques raiſons qu'il ſeroit trop long d'expliquer ici, que quand un Fluide s'échappe d'un vaſe horizontalement, la partie du vaſe oppoſée à l'ouverture, & en général la paroi entiere oppo-

ſée à celle où l'ouverture eſt faite, ſouffre une preſſion plus grande que l'autre paroi, ce qui peut produire dans le vaſe une tendance à ſe mouvoir horizontalement dans un ſens oppoſé au Fluide qui ſort. Mais je crois qu'il eſt très-difficile de calculer exactement cette force, & que c'eſt un Problême de la nature de quelques autres dont j'ai déja fait mention, & où il n'y a pas aſſez de données. On peut voir ce que nous avons dit à ce ſujet dans le premier Volume de nos *Opuſcules*, IVe Mém. §. XVII, pag. 158 & ſuiv.

SCOLIE GÉNÉRAL.

251. Il eſt aiſé de déduire des formules que nous avons données dans l'*article* 239, & de ce que nous avons dit dans les *art.* 241 & 249, que la réſiſtance d'un Fluide au mouvement d'un Corps, eſt en général comme le quarré de la vîteſſe, toutes choſes d'ailleurs égales. Nous ſuppoſerons néanmoins, pour donner plus de généralité à tout ce que nous dirons dans la ſuite, que la réſiſtance ſoit comme une puiſſance, ou même comme une fonction quelconque de la vîteſſe.

Nous ne nous en tiendrons pas non plus aux Loix que nous avons données dans ce Chapitre, de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps compoſés de deux parties ſemblables & égales, & ſemblablement ſitués autour d'un Axe, & qui ſe meuvent ſuivant la direction de cet Axe. Nous donnerons dans la ſuite les Loix de la

réſiſtance des Fluides à des Corps de figure quelconque, qui s'y meuvent d'une maniere quelconque.

De la réſiſtance des Fluides élaſtiques au mouvement des Corps.

252. La Théorie que nous avons donnée ci-deſſus (*art.* 240.) de la réſiſtance d'un Corps qui ſe meut dans un Fluide, dont on ſuppoſe que les parties ſont de petits Corpuſcules élaſtiques iſolés & ſéparés les uns des autres, ne peut pas être d'un grand uſage pour déterminer la réſiſtance des Fluides qu'on appelle élaſtiques. C'eſt de quoi tous les Géométres conviendront facilement. C'eſt pourquoi j'ai cru qu'il étoit à propos de dire quelque choſe de plus précis ſur ce ſujet.

253. Lorſqu'un Corps ſolide ſe meut dans un Fluide élaſtique, il agit non-ſeulement ſur la couche qui lui eſt immédiatement contigue, mais encore ſur pluſieurs autres couches plus éloignées juſqu'à une certaine diſtance, enſorte que le Fluide ſe condenſe à la partie antérieure, & ſe dilate à la partie poſtérieure du Corps.

Le Fluide ſe condenſe à la partie antérieure ſuivant des lignes perpendiculaires à la ſurface antérieure du Corps, & il ſe dilate de même à la partie poſtérieure, ſuivant des lignes perpendiculaires à la ſurface poſtérieure du Corps, puiſque le Fluide qui eſt à la partie poſtérieure du Corps remplit, en vertu de ſa force élaſtique, l'eſpace que le Corps laiſſe vuide, & que cette force élaſtique tend à agir ſuivant des lignes perpendiculaires à la ſurface du Corps.

254. Suppoſons que $BbacC$ (Fig. 73.) ſoit l'eſpace dans lequel le Fluide eſt condenſé à la partie antérieure, il eſt aiſé de voir (*art.* 193.) que les vîteſſes des différens points qui compoſent, par exemple, la fibre $M\mu$, ſeront en progreſſion Arithmétique, telle, que la ſomme des vîteſſes de tous les points eſt égale à la moitié de la vîteſſe du point M priſe autant de fois qu'il y a de Corpuſcules dans la fibre $M\mu$; & qu'ainſi la quantité de mouvement du Fluide contenu en l'eſpace $BbacC$ ſera moindre de la moitié, que ſi le Fluide n'étoit pas élaſtique, parce qu'en ce dernier cas tous les points de l'eſpace $M\mu$ recevroient, ou tous à-la-fois, ou ſucceſſivement une vîteſſe égale. Il en eſt de même du Fluide qui ſe dilate dans l'eſpace $BbcC$.

Il faut donc (en nommant Δ la denſité du Fluide, & φ la force élaſtique) regarder l'action du Fluide ſur la ſurface antérieure BAC, comme égale à $2u\Delta\times\int\frac{dxdy}{2}\times\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{\varphi\times BC.dx}{u}$, & l'action ſur la ſurface poſtérieure ſe trouvera de même égale à $\varphi.BC.\frac{dx}{u}-u\Delta.DC$; d'où il s'enſuit que l'action totale qui tend à diminuer le mouvement du Corps, ſera $u\Delta dx(\int\frac{dy^3}{ds^2}+DC)$ force qu'il faudra faire égale à $-mdu$.

SCOLIE.

255. Il faut pourtant remarquer que le Fluide n'a d'action ſur la ſurface poſtérieure du mobile, qu'autant que

le Fluide a une assez grande force élastique, pour pouvoir remplir tout d'un coup l'espace que le Corps laisse vuide par derriere. Autrement il ne faut avoir égard qu'à la résistance que souffre la surface antérieure. M. Robins a déja fait cette Observation dans ses nouveaux Principes d'Artillerie*: mais la Théorie qu'il établit sur la résistance des Fluides élastiques est fort différente de celle que je donne ici, autant que j'en ai pû juger en parcourant son Ouvrage fort rapidement.

Au reste, si la surface postérieure du mobile est courbe, il y aura toujours, quelle que soit la force élastique du Fluide, une partie plus ou moins grande de l'espace que le Corps laisse vuide par derriere, qui sera remplie par l'irruption du Fluide : car la vîtesse de chaque point de la surface postérieure de la courbe est toujours à la vîtesse du Fluide, comme le ds de ce point est au dy, & ainsi si on prend toute la partie de la surface postérieure, ou $\frac{u\,dy}{ds}$ n'est pas plus grand que la vîtesse avec laquelle le Fluide se mouvroit en vertu de sa force φ, il est constant que le Fluide exercera au moins sur cette partie de la surface, une pression à laquelle il faudra avoir égard, & qui sera aisée à calculer.

COROLLAIRE.

256. Si une figure composée de quatre parties égales & semblables, (à peu près telle que le représente la Figu-

* A New Principles of Gunnery. by *Benjamin Robins* F. R. S. London &c.

re 77), ſe meut dans un milieu élaſtique avec une vîteſſe qui ne ſoit pas aſſez grande, pour que le Fluide ne puiſſe pas venir remplir l'eſpace qu'elle laiſſe vuide, on trouvera

$$-mdu = 2u\Delta dx\int\frac{dy^3}{ds^2}.$$

Ce qui revient au même, comme il eſt aiſé de le faire voir, que la formule *A* de l'*article* 239. Car dans cette formule *A*, *m* exprimoit proprement le volume du Corps *BAC*, & δ le rapport des denſités : ici *m* exprime la maſſe réelle du Corps *BAC*, & Δ la denſité du Fluide.

De la réſiſtance des Fluides, en ayant égard à l'adhérence de leurs parties.

257. Il eſt conſtant que l'adhérence des parties augmente la réſiſtance des Fluides de deux manieres, 1°. les particules trouvent plus de réſiſtance à ſe ſéparer les unes des autres, de ſorte que la vîteſſe de chaque particule doit non-ſeulement être égale à $\frac{udy}{ds}$, mais à $\frac{udy}{ds}$ augmentée de la vîteſſe qu'il faudroit donner à ces particules pour ſurmonter la réſiſtance qu'elles font à être diviſées les unes des autres. Car il eſt aiſé de voir que le ſolide *BAC* (Fig. 73.) en pouſſant les particules, tend à les diviſer. Soit donc φ la force de l'adhérence des particules, c'eſt-à-dire, la vîteſſe qu'il faudroit leur donner pour que leur adhérence fût ſurmontée, ſi cette vîteſſe étoit augmentée tant ſoit peu; on aura pour l'expreſſion de la réſiſtance que

ſouffre la ſurface antérieure BAC, $\int(\Delta . ds . \frac{dx\,dy}{ds} \times [\frac{2u\,dy}{ds} + 2\varphi] . \frac{dy}{ds})$. 2°. Les parties qui ſont à la ſurface poſtérieure du ſolide, réſiſtent à l'effort que fait ce ſolide pour les entraîner.

Si l'adhérence des parties n'eſt pas aſſez forte pour que le Fluide forme autour du Corps un Tourbillon fort grand, on pourra s'en tenir aux deux remarques précédentes, & la réſiſtance que ſouffrira la partie poſtérieure du Corps ſera $BC . \Delta . dx . u$, ſoit que cette ſurface ſoit plane ou courbe, parce que le ſolide BAC entraîne toutes les parties du Fluide adhérentes à ſa ſurface poſtérieure dans une direction parallèle à ſon Axe AD, au lieu qu'il pouſſe les parties antérieures dans une direction perpendiculaire à ſa ſurface; on aura donc en général

$$-m\,du = 2u\,\Delta\,dx . (\int \frac{dy^3}{ds^2} + \int \frac{\varphi\,dy^2}{ds} + DC).$$

AVERTISSEMENT.

La matiere de la réſiſtance des Fluides n'eſt ici proprement qu'ébauchée. Nous l'avons traitée depuis d'une maniere beaucoup plus directe & plus rigoureuſe dans notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, Paris 1752, auquel nous renvoyons. Il s'en faut pourtant beaucoup que dans cet Eſſai même, nous ayons pleinement approfondi cette matiere épineuſe & importante. Elle ren-

ferme encore bien des difficultés ; une des principales eſt le paradoxe ſingulier ſur la nullité abſolue de la réſiſtance qu'un Corps d'une certaine figure paroît devoir éprouver dans un Fluide où il ſe meut ; paradoxe que nous avons propoſé aux Géométres dans le Tome V de nos Opuſcules, pag. 132, & dont nous les invitons à chercher la ſolution.

CHAPITRE II.

Du mouvement d'un Corps qui s'enfonce dans un Fluide, ou Eſſai d'une nouvelle Théorie de la Réfraction des Corps ſolides.

258. JE ne traiterai dans ce Chapitre que des Loix de la réfraction du plan circulaire ou de la Sphere, & j'expliquerai plus bas les Loix de la réfraction des Corps de figure quelconque. Je commencerai par le plan circulaire, parce que les calculs ſont un peu plus ſimples que pour la Sphere, & que d'ailleurs les Loix de la réfraction de l'un bien établies, ſerviront à entendre plus aiſément celles de l'autre. Je ſuppoſerai que le Cercle entre du premier Fluide dans le ſecond, de telle maniere, que la direction du centre de ce Cercle ſoit dans ſon plan, & que ce plan ſoit perpendiculaire à la ſurface commune qui ſépare les deux Fluides.

SECTION I.

SECTION I.

De la Réfraction du plan circulaire.

PROBLÊME I.

259. *Un Cercle* BNA (Fig. 78.) *étant mû ſuivant la direction* CA, *trouver la réſiſtance que font à ſon mouvement dans tel inſtant qu'on voudra, les particules d'un Fluide dans lequel on ſuppoſe qu'un de ſes Arcs quelconque* AM *eſt plongé.*

J'ai démontré ci-deſſus *art.* 244, que le Cercle *BNA* mû dans un Fluide en repos avec une vîteſſe quelconque *u* ſuivant la direction *CA*, ſouffre la même réſiſtance que ſi ce Cercle *BNA* étoit en repos, & que les particules du Fluide vinſſent le choquer avec la vîteſſe *u* ſuivant la direction *DM* parallèle à *CA*. Cela poſé, ſoit *f* l'action qu'exerceroit le Fluide contre une ligne donnée comme *CB*, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une vîteſſe donnée *g*, & ſuppoſons, pour rendre la choſe plus générale, que la réſiſtance ſoit comme une fonction quelconque de la vîteſſe, (nous nous ſervirons de la lettre φ, pour déſigner cette fonction, enſorte que φu, φg, exprimeront des fonctions ſemblables de *u* & de *g*). Soient menées les lignes *MF*, *mf*, infiniment proches l'une de l'autre, & perpendiculaires à *CA*, & ſoient nommées les conſtantes *CA* ou *CB*, *a*, l'indéterminée *AF*, *x*; l'effort abſolu des particules du Fluide qui choquent l'Arc *Mm*, ſera $\frac{f\varphi u.(adx-xdx)}{\varphi g.a\sqrt{[2ax-xx]}}$, & l'effort

qui en réſulte ſuivant MC eſt $= \frac{f\phi u.[a-x]^2.dx}{\phi g.aa\sqrt{[2ax-xx]}}$.

L'effort ſuivant MC ou CS ſe décompoſe en deux autres, l'un ſuivant CR directement oppoſée à CA, & cet effort eſt $= \frac{f\phi u.[a-x]^3.dx}{\phi g.a^3\sqrt{[2ax-xx]}}$: l'autre ſuivant CQ perpendiculaire à CA, & ce ſecond effort eſt $\frac{f\phi u.[a-x]^2.dx}{\phi g.a^3}$.

Si l'on intégre maintenant chacune de ces deux dernieres quantités, en ne faiſant varier que x qui eſt en effet la ſeule changeante (car la vîteſſe u eſt commune à toutes les parties du Fluide, qui viennent choquer l'Arc AM dans l'inſtant ſuppoſé, & par conſéquent doit être regardée comme conſtante pendant cet inſtant); on trouvera que l'effort total ſuivant CR ou AC, réſultant de l'impreſſion du Fluide ſur l'Arc AM, eſt $\frac{f\phi u}{3a^3\phi g} \times (3aa\sqrt{[2ax-xx]} - [2ax-xx]^{\frac{3}{2}}) = \frac{f\phi u}{3CA^3.\phi g} \times (3MF.CA^2 - MF^3)$; & l'effort total ſuivant CQ, ſera $\frac{f\phi u}{3a^3\phi g} \times (3aax - 3ax^2 + x^3)$.

COROLLAIRE I.

260. Donc 1°. l'effort ſuivant CR réſultant de l'impreſſion faite ſur le quart de Cercle entier AB, ſeroit $\frac{2f\phi u}{3\phi g}$.

2°. L'effort ſuivant CR réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc BM, ſeroit $\frac{f\phi u}{3CA^3.\phi g}(2CA^3 - 3MF.CA^2 + MF^3)$.

3°. Enfin, l'effort ſuivant CR réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc EM, ſeroit $\frac{f\phi u}{3CA^3.\phi g}.(3.[Ee-MF].CA^2+MF^3-Ee^3)$.

COROL. II.

261. Il ſuit encore 1°. que l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur le quart de Cercle entier AMB, ſeroit $\frac{f\phi u}{3\phi g}$.

2°. L'effort ſuivant CQ réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc BM, ſeroit $\frac{f\phi u.[a-x]^3}{\phi g.3a^3}=\frac{f\phi u.CF^3}{\phi g.3CA^3}$.

3°. Enfin, l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion du Fluide ſur l'Arc EM, ſeroit $\frac{f\phi u.(CF^3-Ce^3)}{\phi g.3CA^3}$.

REMARQUE I.

262. Pour avoir l'effort ſuivant CR réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc BAH plus grand que le quart de Cercle, il faudra ajouter enſemble les efforts ſuivant CR, réſultans des impreſſions faites ſur les Arcs BA, AH, & l'on aura pour l'expreſſion de cet effort, $\frac{f\phi u}{3CA^3.\phi g}\times(2CA^3+3MF.CA^2-MF^3)$ qui ne differe de celle qu'on a trouvée pour l'Arc BM, (*art.* 260, *n.* 2.) que par le ſigne de MF, qui en effet eſt ici négative. On trouvera

de même $\frac{f\phi u}{3CA^3.\phi g}.(3.[Ee+MF).CA^2-MF^3-Ee^3)$ pour la valeur de l'effort ſuivant CR réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc EMH, & cette expreſſion ne differe auſſi de celle qu'on a trouvée pour l'Arc EM, (*art.* 260, *n.* 3.) que par le ſigne de MF, qui en effet doit être priſe ici négativement.

Au contraire, pour avoir l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc BAH, il faudra ſouſtraire l'effort ſuivant Cq réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc AH, de l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur le quart de Cercle BA; de ſorte que l'effort qui reſtera ſuivant CQ, ſera égal à celui qui proviendroit de l'impreſſion faite ſur l'Arc BM, complément de l'Arc BAH au demi-Cercle.

De-là il ſuit 1°. que les formules des Corol. I. & II. ci-deſſus, ſont générales pour toutes ſortes d'Arcs plus petits ou plus grands que le quart de Cercle. 2°. Que ſi l'Arc BAH eſt un demi-Cercle entier, l'effort ſuivant CQ ſera nul, & il n'y aura que l'effort ſuivant CR, qui retardera le mouvement. Le centre C continuera donc alors ſon chemin en ligne droite ſuivant CA; 3°. Que le plus grand de tous les efforts ſuivant CQ, eſt celui qui réſulte de la réſiſtance faite au quart de Cercle entier AMB.

REMARQUE II.

263. Si le point E (Fig. 79.) eſt de l'autre côté du

point B par rapport au point M, & qu'on cherche la réſiſtance faite par le Fluide à l'Arc EM, alors il eſt viſible que la partie BE étant à couvert de l'impreſſion du Fluide, il n'y a que l'Arc BM qui ſouffre de la réſiſtance. Donc les efforts ſuivant CR & CQ ne ſont point alors $\frac{f\Phi u}{3CA^3.\Phi g}(3.[Ee-MF].CA^2+MF^3-Ee^3)$, & $\frac{f\Phi u.(CF^3+Ce^3)}{\Phi g.3CA^3}$, comme on pourroit le penſer d'abord, mais ſimplement $\frac{f\Phi u}{\Phi g}.(2CA^3-3MF.CA^2+MF^3)$, & $\frac{f\Phi u.CF^3}{\Phi g.3CA^3}$ (*art.* 260, *n.* 2, & 261, *n.* 2.)

§. I.

De la Réfraction dans des milieux qui réſiſtent comme le quarré de la vîteſſe.

PROBLÊME II.

264. *Trouver la courbe décrite par le centre* C (Fig. 80.) *d'un Cercle* NMH *qui paſſe obliquement d'un Fluide moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant; en ſuppoſant que le Cercle* NMH *ſoit ſans peſanteur, & que la réſiſtance dans chaque Fluide ſoit comme le quarré de la vîteſſe.*

Soit CA la direction du centre C dans un inſtant quelconque, où l'enfoncement Ea M dans le nouveau Fluide, eſt encore aſſez petit, pour que le point E ſe trouve ſur le quart de Cercle AB; il eſt clair 1°. que les Arcs AM, AH, auſſi-bien que les Arcs BE, $b\varepsilon$, étant égaux

& dans le même Fluide, & ſemblablement poſés de part & d'autre de CA, l'impreſſion du Fluide ſur ces Arcs ne peut donner d'impulſion au centre C, que ſuivant CN directement oppoſée à CA. 2°. Les Arcs EM, ϵH, étant de même égaux, & ſemblablement poſés de part & d'autre de CA, mais dans des Fluides différens; il s'enſuit, que puiſqu'on ſuppoſe le Fluide où eſt l'Arc EM plus réſiſtant que celui où eſt l'Arc ϵH, l'effort ſuivant Cb qui réſulte de l'impreſſion du Fluide ſur l'Arc EM, l'emportera ſur l'effort ſuivant CB qui réſulte de l'impreſſion du Fluide ſur l'Arc ϵH. Le centre C ſera donc pouſſé ſuivant Cb, & comme ſa tendance eſt en même-tems ſuivant CA, l'action conjointe de ces deux forces lui fera décrire l'Arc ou la petite ligne Ci. D'où l'on voit que *la direction* CA *du centre* C *doit s'écarter continuellement de la ligne* Ca *perpendiculaire à la ſurface des deux Fluides, au moins tant que le point* E *eſt ſur le quart de Cercle* AB.

Pour trouver l'Equation de la courbe que le centre C décrit alors, nous nommerons f, la réſiſtance que feroit le Fluide où eſt l'Arc EM, à la ligne $CB = a$, mûe dans ce Fluide avec une vîteſſe donnée g, f la réſiſtance que feroit l'autre Fluide à la ligne a mûe dans ce Fluide avec la même vîteſſe g, & u la vîteſſe du centre C ſuivant CA dans l'inſtant ſuppoſé : l'effort ſuivant Cb provenant de la réſiſtance du Fluide où eſt l'Arc EM, ſera (*art.* 261, *n.* 3.) $\frac{fuu}{3CA^3gg}.(CF^3 - Ce^3)$ & l'effort ſuivant CB

provenant de la réſiſtance faite à l'Arc eH, ſera de même $\frac{fuu}{3CA^3 \cdot gg}.(CF^3 - Ce^3)$. Donc l'effort qui réſulte de ces deux-là ſuivant Cb, ſera $\frac{[f-f].uu}{3CA^3 gg}.(CF^3 - Ce^3)$; or cet effort multiplié par le quarré du tems $(\frac{Ci^2}{uu})$ doit être égal au produit de la maſſe m du Cercle par la petite ligne oi. On a donc $\frac{[f-f].uu.(CF^3 - Ce^3).Ci^2}{gg.3CA^3.uu} = m.oi$, ou ſimplement $\frac{[f-f].(CF^3 - Ce^3).Ci^2}{gg.3CA^3} = m.oi$.

Pour rendre homogenes les deux membres de cette Equation, nous ſuppoſerons que la vîteſſe donnée g ſoit égale à celle que la maſſe m auroit acquiſe en parcourant un eſpace donné b, étant pouſſée par une force motrice conſtante p dont on connoiſſe le rapport à la réſiſtance f ou f; nous aurons $gg = \frac{2pb}{m}$, & l'Equation précédente deviendra $\frac{[f-f].Ci^2}{2pb.3CA^3}.(CF^3 - Ce^3) = oi \ldots\ldots (A)$.

Soit maintenant P l'origine de la courbe cherchée PC, $PH = x$, $HC = y$, $CV = dx$, $Vu = dy$; on aura, en prenant dx conſtante, $ui = ddy$; & les triangles ſemblables CVu, uio donnent $oi = \frac{dx\,ddy}{V[dx^2 + dy^2]}$. De plus, il eſt évident que la profondeur Oa de l'enfoncement doit être égale à la quantité PH dont le centre eſt deſcendu. Donc $Oa = PH = x$, & par conſéquent OM

ou $OE = \sqrt{[2ax - xx]}$, $CR = \frac{adx - xdx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; $RF = \frac{dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; donc $CF = \frac{adx - xdx + dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, & $Ce = \frac{adx - xdx - dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$. Si l'on ſubſtitue préſentement dans l'Equation (A) ces quantités analytiques à la place des lignes qu'elles repréſentent, nous aurons

$3pba^3dxddy = [f - f](3.[a-x]^2.dx^2dy\sqrt{[2ax - xx]} + dy^3.[2ax - xx]^{\frac{3}{2}})$ Equation de la courbe PC que décrit le centre C, tant que le point E eſt ſur le quart de Cercle AB.

Pour en ſéparer les indemnités, ſoit $ady = zdx$, & l'on aura

$3pba^4dz = (f - f)[3aa.(a-x)^2zdx.\sqrt{[2ax - xx]} + z^3dx(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}]$..... ($B$).

Cette Equation peut ſe rapporter à la forme $mdz = qzdx + hz^n tdx$, dans laquelle m, h, ſont des coefficiens conſtans, q, t, des fonctions quelconques de x, & n un nombre quelconque, & que Meſſieurs *Bernoulli* *, *Manfredi* **, *Craig* *** &c. ont appris à intégrer. Si donc on prend c pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, & qu'on ſuppoſe qu'à l'origine de la courbe, $ady = hdx$, & par conſéquent $z = h$, on aura l'Equation de la courbe exprimée en cette ſorte.....

* *Act. Erud.* 1697. ** *De conſtr. Æq. diff.* p. 193. *** *De calc. fluent.* p. 42.

(C)...

$$(C)\ldots dy = hdxc^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2 \sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} :$$

$$\sqrt{[aa - \frac{hh}{3}\int \frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3} \times}$$

$$c^{\int (2dx.[f-f].[a-x]^2 \sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

].

Soit maintenant décrite la courbe GSQ (Fig. 81.) dont les coordonnées $PH = x$, $HS = z$, & dont l'Equation ſoit celle qui eſt marquée (B); je dis que ſi l'on prend l'ordonnée $HC = \frac{PGSH}{a}$, le point C ſera à la courbe cherchée.

Nous venons de voir, que tant que le point E eſt ſur le quart de Cercle AB, (Fig. 80.) la direction CA du centre C s'éloigne toujours de la perpendiculaire Ca; d'où il s'enſuit qu'à meſure que le Cercle s'enfonce, le point A monte, auſſi-bien que les points E, M, & le point B deſcend. Donc le point E & le point B doivent ſe rencontrer. Pour trouver quelle doit être la quantité de l'enfoncement lorſque ces points ſe rencontrent, je nomme cette quantité n, & je remarque qu'on doit avoir pour lors $dy = \frac{[a-n]dx}{\sqrt{[2an-nn]}}$; donc $z = \frac{aa-an}{\sqrt{[2an-nn]}}$; c'eſt pourquoi ſi l'on décrit la courbe OT (Fig. 81.) dont les coordonnées $PH = x$, $PT = t$ ſoient telles que $t = \frac{aa-ax}{\sqrt{[2ax-xx]}}$, le point Q où elle coupera la courbe GSQ, déterminera la quantité cherchée $PL = n$, & le point N de la courbe qui lui répond.

Je dis préſentement, que lorſque *le point* E (Fig. 80.) *s'eſt confondu avec le point* B, *le centre* C *doit décrire une autre courbe toute différente par ſon Equation, de celle qu'il a décrit juſqu'alors.* Car il eſt aiſé de voir que la force ſuivant *Cb* (Figure 79.) continuant de l'emporter ſur la force ſuivant *CB*, le point *B* doit continuer de deſcendre, tandis que le point *E* continue de monter. La force ſuivant *Cb* ne ſera donc plus alors (*art.* 263.) $\frac{[f-f]}{3CA^3 . gg} \times (CF^3 + Ce^3) . uu$, mais ſimplement $\frac{[f-f] . uu . CF^3}{3CA^3 . gg}$; & on aura pour l'Equation de la courbe $6pba^3 dx ddy = [f-f](adx - xdx + dy\sqrt{[2ax - xx]})^3$. Je n'ai pû juſqu'à préſent en ſéparer les indéterminées, quoiqu'il ſoit facile de la réduire à pluſieurs formes plus ſimples que celle-ci. Il n'y a donc point autre choſe à faire, que de conſtruire cette ſeconde courbe par les ſéries.

COROLLAIRE I.

265. Si l'on fait attention aux calculs précédens, on verra que nous n'avons pas eu beſoin de connoître la vîteſſe à chaque point de la courbe, pour déterminer la nature de cette courbe, ce qui peut paroître d'abord aſſez ſingulier; mais on tire de là une propoſition encore plus ſinguliere, c'eſt que *ſi deux Cercles égaux paſſent d'un Fluide donné dans un autre Fluide donné, & qu'ils entrent tous deux dans le ſecond Fluide avec la même inclinaiſon,*

ils décriront la même courbe dans leur paſſage, & ſouffriront la même réfraction, quelque différentes qu'ayent été leurs vîteſſes en entrant, pourvû que la réſiſtance dans chaque Fluide ſoit comme le quarré de la vîteſſe.

Car il eſt aiſé de voir que l'expreſſion de la vîteſſe *initiale* (j'appelle ainſi la vîteſſe du centre C à l'origine de la courbe) n'entre point dans l'Equation (C), qui eſt, comme nous avons vû, l'Equation de la premiere courbe; quand on voudroit même ſuppoſer que $gg = \frac{2pb}{m}$ fût le quarré de la vîteſſe initiale, il eſt évident que la réſiſtance étant (*hyp.*) comme le quarré de la vîteſſe, & m la même de part & d'autre, $\frac{[f-f]}{2pb}$ ſeroit toujours une quantité conſtante. Donc la premiere courbe ſera la même de part & d'autre. A l'égard de la ſeconde courbe, comme l'expreſſion de la vîteſſe n'entre point non plus dans ſon Equation, il eſt facile de faire voir par des Principes ſemblables, que la premiere courbe étant la même, la ſeconde ne peut manquer d'être auſſi la même de part & d'autre. Donc &c.

COROL. II.

266. Si l'on ſuppoſe maintenant que les deux Cercles ſoient différens en maſſe, & même, ſi l'on veut, en vîteſſe, pourvû que l'inclinaiſon en entrant & leur denſité ſoit la même; on aura $gg = \frac{2pb}{m}$ conſtante, & faiſant p

proportionnelle à m, b ſera conſtante, & $\frac{[f-f]}{2pb}$ ſera comme $\frac{[f-f]}{m}$. Mais f eſt comme a, auſſi-bien que f, & la denſité étant la même, m eſt comme aa. donc $\frac{[f-f]}{m}$ eſt comme $\frac{1}{a}$. De-là & de l'Equation (C) il s'enſuit que ſi dans les deux premieres courbes décrites par chaque Cercle, on prend des abſciſſes proportionnelles aux rayons, les appliquées correſpondantes ſeront auſſi comme les rayons. Donc la premiere courbe PN (Fig. 81.) décrite par l'un des Cercles, ſera ſemblable à la premiere courbe décrite par l'autre. Il ne ſera pas plus difficile de prouver que les deux autres courbes ſont auſſi ſemblables. Donc les deux Cercles ſouffriront encore la même réfraction, quoiqu'ils ne décrivent pas la même courbe.

Donc *deux Cercles différens quelconques venans avec des vîteſſes différentes quelconques, d'un Fluide donné dans un autre Fluide donné, & entrant dans le ſecond Fluide avec la même inclinaiſon, ils ſouffriront la même réfraction, pourvû que la réſiſtance dans chaque Fluide ſoit comme le quarré de la vîteſſe.*

COROL. III.

267. Si l'on ſuppoſe $f = 0$, on aura, en effaçant f dans les Equations précédentes, l'Equation de la courbe décrite au paſſage du vuide dans un Fluide. On remarquera de plus, que quelque valeur qu'on ſuppoſe à f & à f, toutes les autres quantités reſtant les mêmes, la courbe

ne changera point, pourvû que f — f demeure conſtante. De-là & des deux Corollaires précédens, on tire ce troiſiéme Théorême.

Un Cercle quelconque venant avec une vîteſſe quelconque, d'un Fluide dont la réſiſtance eſt f, & entrant ſous un angle quelconque dans un nouveau Fluide dont la réſiſtance eſt f, *il ſouffrira la même réfraction qu'un autre Cercle quelconque qui viendroit avec une vîteſſe quelconque d'un Fluide dont la réſiſtance ſeroit F, & entreroit ſous le même angle que le premier Cercle, dans un nouveau Fluide, dont la réſiſtance ſeroit* F, *pourvû qu'on ſuppoſe* $F - F = f - f$, *& que dans chacun de ces Fluides la réſiſtance ſoit comme le quarré de la vîteſſe.*

REMARQUE.

268. Si on jette les yeux ſur la Figure 80, on verra que le point B deſcendant toujours vers a, les points E, M, montent vers D, en même-tems que le point b. Or cela poſé, il peut arriver trois cas différens.

1°. Si le point M (Fig. 82.) rencontre le point b avant que d'arriver en D, c'eſt-à-dire, avant que le Cercle ſoit enfoncé tout-à-fait, il eſt viſible qu'à l'inſtant de cette rencontre, l'effort ſuivant Cb deviendra nul, puiſque le Cercle préſentera au nouveau Fluide une moitié entiere BAb partagée en deux également par ſa direction CA. Le centre C ira donc en ligne droite, au moins pour cet inſtant. Mais dans les inſtans ſuivans, le Cercle continuera de préſenter une moitié entiere au Fluide, comme il

eſt aiſé de le voir : donc le centre continuera d'aller en ligne droite. Donc dans ce cas-ci *le Cercle ceſſera de décrire une courbe avant que d'être enfoncé tout-à-fait.* D'où il s'enſuit, que la direction CA dans le nouveau Fluide étant donnée, on pourra déterminer aiſément, quelle étoit la quantité de l'enfoncement du Cercle, lorſqu'il a ceſſé de décrire une courbe. Il ne faudra pour cela que mener BCb perpendiculaire à CA, & du point b la ligne bO perpendiculaire à la verticale DCa; l'abſciſſe Oa exprimera la quantité de l'enfoncement qu'on cherche.

2°. Si les points E, M, arrivent en D préciſément au même inſtant que le point b; alors il eſt vrai que *le centre C décrit une courbe pendant tout le tems que le Cercle s'enfonce*, mais on voit auſſi que *le Cercle ne s'enfonce dans le nouveau Fluide, que de la quantité préciſe de ſon diamétre, & qu'il décrit après ſon immerſion, une ligne droite parallèle à la ſurface qui ſépare les deux Fluides.*

3°. Enfin, ſi le point b (Fig. 83.) arrive en D, avant les points E, M, l'Arc enfoncé peut être pour lors, ou plus grand que le demi-Cercle, comme EaM, ou égal au demi-Cercle, comme eam, ou plus petit comme $\epsilon a \mu$. Or dans chacun de ces trois cas, on voit aiſément que le centre C eſt pouſſé ſuivant Cb, & comme CA eſt pour lors ſa direction, l'action conjointe de ces deux forces lui fera parcourir Cc, ce qui eſt évident. Le Cercle *commencera donc à rentrer dans le Fluide d'où il étoit venu;* & il ne faut qu'une légere attention, pour voir que dans les inſtans ſuivans, *il continuera de remonter.* Le

point A montera donc vers D, le point B de a vers D ſuivant aAD, & les points E, M, ou e, m, ou ε, μ, deſcendront vers a. Or ſi l'Arc enfoncé eam ou $\varepsilon a \mu$ eſt égal ou moindre que le demi-Cercle, lorſque la direction eſt CA, les points e, m, ou ε, μ, rencontreront néceſſairement le point B en quelque endroit de l'Arc ma ou μa. Le Cercle préſentant alors une moitié entiere au Fluide, on voit qu'*il ceſſera de décrire une courbe avant ſon émerſion totale*, & ſortira par une ligne QG qui fera avec la ſurface du Fluide un angle aigu du côté de G. [Nous prouverons ci-après, que dans le cas même où l'Arc enfoncé EaM eſt plus grand que le demi-Cercle, lorſque la direction eſt CA, le centre C doit ceſſer de décrire une courbe avant ſon émerſion totale, & ſortir, de même que dans les deux cas précédens, par une ligne inclinée à la ſurface du Fluide.]

COROL. IV.

269. L'Equation (A) (Fig. 80.) du Problême II, fait voir que $\frac{Ci^2}{oi}$ qui exprime le rayon de la développée de la courbe, eſt en raiſon inverſe de $CF^3 - Ce^3$ dans la premiere courbe, & en raiſon inverſe de CF^3 dans la ſeconde. Mais à l'origine de la premiere courbe $CF = Ce$, & à la fin de la ſeconde, $CF = 0$. Donc *le rayon de la développée eſt infini aux deux extrêmités de la courbe.* On peut faire ſur cette développée pluſieurs autres remar-

ques purement Géométriques. J'en mettrai ici quelques-unes des principales, dont je ſupprimerai les démonſtrations qui ſont faciles à trouver.

1°. Si à l'extrémité de la premiere courbe $dy = dx$, le rayon de la développée y ſera le plus petit qu'il eſt poſſible; car CF devient alors égale au rayon, c'eſt-à-dire, la plus grande qu'il eſt poſſible, & $Ce = 0$. 2°. En ſuppoſant dans les Equations du Problême, $f - f = p$ (ſuppoſition que rien n'empêche de faire) ſi la ligne OL (Fig. 81.) eſt égale à $\sqrt{(2aa \pm \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée eſt encore un *minimum* à l'extrémité N de la premiere courbe, & ce rayon eſt égal au rayon a du Cercle qui s'enfonce. Cette quantité $\sqrt{(2aa \pm \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{36abb}]})}$ eſt imaginaire, ſi $6b > a$. Dans ce dernier cas, auſſi-bien que dans le cas ou $6b = a$, on trouvera que ſi $OL < \frac{a}{\sqrt{2}}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la premiere courbe, & que ſi $OL > \frac{a}{\sqrt{2}}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la ſeconde Courbe. Au contraire, lorſque $b < \frac{a}{6}$, on trouve, que ſi OL eſt moindre que la moitié de la quantité $\sqrt{(2aa - \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée

développée doit être un *minimum* à un des points de la premiere courbe : ſi OL eſt $>$ que la moitié de.... $\sqrt{(2aa+\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la ſeconde courbe : enfin, ſi OL eſt $<$ que la moitié de $\sqrt{(2aa+\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, mais $>$ que la moitié de $\sqrt{(2aa-\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, alors, ou OL eſt $> \frac{a}{\sqrt{2}}$, & en ce cas, le rayon de la développée eſt un *minimum* à un des points de la premiere courbe, ou $OL < \frac{a}{\sqrt{2}}$, & le rayon de la développée eſt un *minimum* à un des points de la ſeconde courbe, ou enfin $OL = \frac{a}{\sqrt{2}}$, & le rayon de la développée eſt un *minimum* à l'extrémité de la premiere courbe.

SCOLIE.

270. Pour trouver dans la ſuppoſition préſente la quantité b, & voir dans quels cas elle eſt plus petite ou égale, ou plus grande que $\frac{a}{6}$, on obſervera 1°. que f & f ſont les réſiſtances que feroient chacun des Fluides à la ligne a, ou, ce qui revient au même, à un parallélogramme dont a ſeroit la baſe, & une ligne quelconque λ la longueur. 2°. Si un tel parallélogramme étoit mû avec la vîteſſe g dans un milieu dont la denſité D fût égale à la

différence de denſité des deux milieux, & dont par conſéquent la réſiſtance fût $f - f$, & qu'on appellât μ la maſſe & δ la denſité du parallélogramme; on auroit, comme il eſt aiſé de le conclure de la Propoſ. 37, liv. 2 de M. *Newton*, $gg = \frac{2\lambda.[f-f].\delta}{\mu.D}$; mais $gg = \frac{2.[f-f].b}{m}$.

Donc $b = \frac{\lambda m \delta}{\mu D}$. ou (à cauſe que $m : \mu :: c : 2\lambda$) $b = \frac{c\delta}{2D}$, c exprimant la circonférence dont le rayon eſt a.

Corol. V.

271. L'angle de contingence $\frac{oi}{Ci} = \frac{[f-f].Ci}{2pb.3CA^3} \times (CF^3 - Ce^3)$ (Fig. 80.) dans la premiere courbe, & $= \frac{(f-f).Ci}{2pb.3CA^3} \times CF^3$ dans la ſeconde. D'où l'on voit qu'en ſuppoſant $\frac{[f-f]}{2pb}$ égale à une quantité finie, & prenant l'Arc Ci conſtant & infiniment petit du premier ordre, l'angle de contingence ſera infiniment petit du premier ordre, ſi $CF^3 - Ce^3$ ou CF^3 eſt une quantité finie; infiniment petit du ſecond, ſi $CF^3 - Ce^3$ ou CF^3 eſt infiniment petit du premier, &c.

Problême III.

272. *Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême précédent, avec cette ſeule différence, que le paſſage*

ſe faſſe d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, trouver la courbe que le centre C *doit décrire.*

En appliquant à ce cas-ci les raiſonnemens que nous avons faits dans la ſolution du Problême II, (*art.* 264.) on verra qu'ici *la courbe doit être concave vers la perpendiculaire*, & il n'y a autre choſe à faire, que de mettre dans les calculs de l'*article* 264. — ddy pour ddy, & $f - f$ pour $f -$ f. Ce qui ne change rien dans les Equations, ſinon que la quantité $f -$ f qui dans le Problême II étoit poſitive, doit ici être regardée comme une quantité négative. D'où il s'enſuit, que les calculs du Problême II ſont également applicables à celui-ci, en ſuppoſant que f exprime la réſiſtance du Fluide où entre le Cercle, & f la réſiſtance du Fluide d'où il vient.

La courbe GSQ (Fig. 81.) doit alors s'approcher de plus en plus de PO, & la courbe PN eſt concave vers PO.

REMARQUE I.

273. Comme la ligne CA (Fig. 84.) s'approche ici continuellement de la perpendiculaire Ca, & que le point B monte continuellement vers D, en même-tems que le point E, on pourroit penſer d'abord qu'il y auroit des cas où le point B arriveroit en G avant, ou du moins en même-tems que le point E, de façon que la courbe dégénereroit alors en une ligne droite Ca perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Mais il eſt clair d'un autre côté, que ſi EM arrive en Gg avant que le point B ſoit en G, la direction CA ne pourra jamais devenir perpendiculaire

à la ſurface du Fluide. Car le point g continuant à monter vers D, & le point b deſcendant en même-tems vers a, ils ſe rencontreront en quelque point de l'Arc bg, & le centre C doit alors ceſſer de décrire une courbe (*art.* 268, *n.* 1.)

Il reſte donc à examiner ſi le point B (Figure 84.) ne peut pas arriver en G avant le point E. Or en premier lieu, dans l'Equation (B) du Problême II, qui dans ce cas-ci eſt celle de la courbe GSQ (Fig. 81.) il eſt clair que tant que x ne ſera pas plus grande que a, z ne ſauroit être $= 0$, puiſqu'autrement le ſecond membre de l'Equation deviendroit infini, le premier reſtant fini. Donc la courbe GSQ ne peut couper ſon Axe PO en aucun point de la ligne PO: donc la courbe OT la rencontre néceſſairement en quelque point Q; mais ce point Q détermine dans ce cas-ci, comme dans le cas du Problême II, quelle eſt la profondeur PL de l'enfoncement, lorſque les points B, E (Fig. 84.) ſe rencontre. Donc le point E doit rencontrer le point B, avant que ce point B puiſſe arriver en G.

Cette démonſtration pourroit laiſſer encore quelque doute dans l'eſprit. Car il eſt aſſez naturel de penſer, que comme les points B, E, montent continuellement vers G, il ſeroit poſſible que le point B, quoique rencontré une ou pluſieurs fois par le point E, arrivât néanmoins en G encore avant le point E. Pour voir clairement ſi cela eſt, ſuppoſons que le point B monte en effet vers G plus vîte que le point E, & que q ſoit la quantité dont le Cer-

cle étoit enfoncé, lorſque les points B, E ſe ſont rencontrés l'un l'autre pour la derniere fois; il eſt clair que le point E ſe trouvant alors par l'*hyp.* ſur le quart de Cercle AB, on aura, en faiſant $x = q + s$;

$(D) \ldots . 6pba^3 dsddy = [f - f](\,[(a-q-s).ds + dy \times \sqrt{(2aq - qq + 2as - 2qs - ss)}\,]^3 - [(a-q-s).ds - dy \times \sqrt{(2aq - qq + 2as - 2qs - ss)}\,]^3)$, équation de la courbe que le centre C devroit décrire dans ce cas-là. Donc ſuppoſant $a\,dy = z\,ds$, & $z = h$ lorſque $s = o$, on aura l'intégrale de cette Equation, dans laquelle il ſera facile de voir qu'on ne peut ſuppoſer $z = o$, ce qui devroit être néanmoins, ſi le point B arrivoit en G avant le point E. Donc, &c.

Donc *ſi un Cercle paſſe d'un Fluide plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, la courbe qu'il décrit dans ſon paſſage, quoiqu'elle tourne ſa concavité vers la perpendiculaire* Ca, *ne ſauroit jamais devenir une ligne droite perpendiculaire à la ſurface du Fluide, au moins dans la ſuppoſition que chaque Fluide réſiſte en raiſon du quarré de la vîteſſe.*

Cette propoſition peut d'ailleurs ſe démontrer ſans calcul de la maniere ſuivante. Suppoſons l'angle aCA infiniment petit : il eſt aiſé de voir (Fig. 80.) que CF ne differe de Ce que d'une quantité infiniment petite. D'où il s'enſuit (*art.* 271.) que l'angle de contingence ſera infiniment petit du ſecond ordre ; & en général, on ne peut ſuppoſer l'angle aCA infiniment petit d'un ordre quelconque, qu'on ne trouve l'angle de contingence infini-

ment petit d'un ordre inférieur. Donc l'angle aCA ne peut être diminué, lorſqu'il eſt infiniment petit, que d'un angle infiniment plus petit que lui : donc cet angle aCA ne ſauroit devenir égal à zero.

Outre que cette démonſtration contient, ce me ſemble, la raiſon Métaphyſique de la propoſition que nous voulons démontrer, elle a encore l'avantage d'être applicable à toutes ſortes d'hypothèſes ſur la Loi de la réſiſtance : car l'angle de contingence ſera comme $\frac{\phi u}{u^2} \times (CF^3 - Ce^3)$ ou $\frac{\phi u}{u^2} . CF^3$. La démonſtration reſtera donc la même ; & il eſt vrai de dire en général, qu'*un Cercle qui paſſe d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, & qui eſt entré dans ce nouveau milieu ſous une direction ſi peu oblique qu'on voudra, ne ſauroit avoir pour direction après ſon enfoncement, une ligne perpendiculaire à la ſurface commune qui ſépare les deux milieux.*

REMARQUE II.

274. Nous avons inſinué dans l'art. 273, que les points B, E peuvent ſe rencontrer pluſieurs fois l'un l'autre. En voici en peu de mots le détail qui ſe démontrera à peu près de la même maniere que les propoſitions énoncées dans l'*art.* 269. Si $6b > a$, *les points* B, E *ne peuvent ſe rencontrer plus d'une fois. Il en eſt de même ſi* $6b = a$; *on remarquera ſeulement que dans ce cas, ſi* OL *eſt égale à* $\frac{a}{V_2}$, *la courbe* GQ *touchera & coupera en* Q *la courbe* OT, *& les*

points B, E *ſe rencontreront deux fois de ſuite dans deux inſtans conſécutifs, pour ne plus ſe rencontrer enſuite. Enfin, ſi* 6b < a, *& que* OL *ſoit préciſément égale à* $V(aa + V[a^4 - a^3] \times \sqrt[3]{V[36abb]})$, *la courbe* GQ *touchera la courbe* OT *en* Q *ſans la couper, & ne viendra la couper que plus bas, d'où il s'enſuit que les points* B, E *ſe rencontreront au moins deux fois. On peut obſerver que* OL *ne ſauroit être moyenne entre la moitié de* $V(2aa + V[a^4 - a^3\sqrt[3]{V(36abb)}])$, *& la moitié de* $V(2aa - V[a^4 - a^3\sqrt[3]{V(36abb)}])$.

A l'égard du rayon de la développée, il eſt un minimum *à l'extrémité de la premiere courbe, lorſque* $OL = \frac{a}{V2}$. *Si* $OL > \frac{a}{V2}$, *il eſt un* minimum *à un des points de la ſeconde courbe, & à un des points de la premiere, ſi* $OL < \frac{a}{V2}$.

REMARQUE III.

275. Il eſt facile à préſent de prouver la propoſition qui nous reſtoit à démontrer ci-deſſus dans l'*art.* 268, *n.* 3, ſavoir que *ſi un Cercle paſſe d'un milieu moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant, & que dans le tems où ſa direction eſt* CA, (Fig. 83.) *ſon Arc enfoncé* E a M *ſoit plus grand que le demi-Cercle, il doit ceſſer de décrire une courbe avant la fin de l'émerſion totale.* Car il ſuffit pour cela (*art.* 268 *&* 272.) que le point *E* arrive en *N* avant le point *b*. Or nous venons de prouver dans la Remarque I, (*art.* 273.) que cela doit être ainſi. Donc &c.

De-là & de l'*article* 273, il s'enſuit en général, que la courbe *CG* décrite par le centre *C* lorſque le Cercle rentre dans le premier milieu d'où il étoit venu, ne peut être égale & ſemblable à la courbe *FC* qu'il a décrite en s'enfonçant. Car ſi ces deux courbes étoient égales & ſemblables, le centre *C* ne ceſſeroit de décrire la courbe *CG* qu'après ſon émerſion totale, puiſqu'il a commencé de décrire la courbe *FC* dès le premier inſtant de ſon immerſion.

REMARQUE IV.

276. Comme dans les Problêmes précédens, nous n'avons pû conſtruire que par la voie des ſéries, la ſeconde des deux courbes que décrit le centre *C*, nous ne pourrions arriver que par un calcul très-long & très-pénible, à la connoiſſance, même peu exacte, de l'angle que fait la direction du centre à l'extrémité de la ſeconde courbe, avec la perpendiculaire à la ſurface des deux Fluides, & qu'on appelle communément *angle de Réfraction*. Ainſi il paroît d'abord qu'il eſt impoſſible de ſavoir *ſi les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante*. C'eſt néanmoins une des choſes qu'on doit déſirer le plus de connoître ſur cette matiere. L'unique moyen qu'il ſemble qu'on ait pour s'en aſſurer, eſt d'examiner ſi dans quelque ſuppoſition particuliere, on pourroit trouver le rapport de ces Sinus. Il eſt bien certain que ſi, dans cette ſuppoſition, le rapport des Sinus n'étoit pas conſtant, on ſeroit fondé à conclure en général, que les

Sinus

Sinus d'incidence & de réfraction ne ſeroient point en raiſon conſtante. Or *il y a deux cas où l'on peut déterminer le rapport des Sinus, ſavoir* 1°. *lorſque les deux milieux different peu l'un de l'autre en réſiſtance.* 2°. *Lorſque la direction du Cercle en entrant eſt preſque perpendiculaire à la ſurface commune des deux Fluides, quelque différence qu'on ſuppoſe d'ailleurs dans les réſiſtances.* Mais dans chacun de ces deux cas, on trouve que *les Sinus ſont en raiſon conſtante.* C'eſt ce que nous allons démontrer, & nous verrons enſuite quelles conſéquences on en peut déduire pour le rapport des Sinus en général.

Commençons par le cas où la différence $f - \mathrm{f}$ des réſiſtances eſt très-petite. Nous ſuppoſerons d'abord que CA (Fig. 85.) ſoit la direction du centre C au commencement de l'immerſion, d'où il s'enſuit que $aM = h$, & ſi on tire les perpendiculaires CB à CA & BZ à Ca, & qu'on nomme aZ, q, on trouvera $h = \frac{aa - aq}{\sqrt{[2aq - qq]}}$. Or la différence de réſiſtance des deux milieux étant (*hyp.*) fort petite, la courbe décrite différera très-peu de la droite CA, c'eſt pourquoi au lieu de prendre comme dans le Problême II, $ady = z\,dx$, nous prendrons $ady = [h + z].dx$; z ne pourra être alors qu'une quantité très-petite, & on aura l'Equation .....

$$6pba^5\,dz = (f - \mathrm{f})\,dx\,[6aa.(a - x)^2.h \times \sqrt{(2ax - xx)} + 2h^3(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}] \ldots\ldots (E).$$

Car comme tous les termes du ſecond membre ſont

multipliés par $f - f$ qui (*hyp.*) eſt une quantité très-petite, il s'enſuit qu'on peut négliger dans ce ſecond membre tous les termes où z ſe rencontreroit, parce que ces termes ſeroient nuls par rapport aux autres. Par-là on aura facilement l'intégrale de l'Equation précédente, & la valeur de z en x.

Suppoſons préſentement, que le centre C ſoit arrivé à l'extrémité de la premiere courbe; ſi la ligne $C\delta m$ eſt pour lors ſa direction, & qu'on mene les perpendiculaires $C\Delta$ & Δz à $C\delta$ & Ca, la ligne az marquera la quantité de l'enfoncement, ou la valeur de x dans cet inſtant. Or comme (*hyp.*) les deux milieux different peu l'un de l'autre, l'angle ACS eſt fort petit, & les lignes aZ (q) & az doivent être cenſées les mêmes. Donc Mm que j'appelle $\mathfrak{G}$ eſt égale à ce que devient la valeur de z, lorſque $x = q$. On a donc.

$$\mathfrak{G} = \frac{f-f}{4pba^5}\left(\frac{3aah-h^3}{3}\left[(a-q).\left[2aq-qq^{\frac{3}{2}}\right]+\left[haa+h^3\right].P\right);\right.$$

j'appelle P ce que devient $\int aadx \sqrt{[2ax-xx]}$ lorſque $x = q$. Si on cherche maintenant de la même maniere l'Equation de la ſeconde courbe, on trouvera, en faiſant $ady = (h+\mathfrak{G}+z)\,dx$, l'équation.....

$$6pba^5dz = (f-f)\,dx\left[aa-ax+h.\sqrt{[2ax-xx]}\right]^3 \ldots (F):$$

en intégrant cette Equation & faiſant attention qu'à l'origine de la courbe, on a $x = az = q$, on aura la valeur de z.

Soit à préſent $C\alpha\mu$ la direction du centre C à l'extrémité

de la ſeconde courbe. Si on mene les perpendiculaires $C\beta$ à $C\alpha$ & βd à $C\alpha$, on prouvera, comme ci-deſſus, que ad qui eſt alors $= x$ ne differe de $2a - q$ qu'infiniment peu. Donc $m\mu$, que j'appelle δ, eſt égale à ce que devient z lorſque $x = 2a - q$. Or ſi on nomme c la circonférence dont le rayon eſt a, il eſt clair que lorſque $x = 2a - q$, on a $\int aadx\sqrt{[2ax - xx]} = \frac{ca^3}{4} - P$. Donc $\delta = \frac{f-f}{24pba^5}[(3haa - h^3).[2q - 2a].(2aq - qq)^{\frac{3}{2}} + (3haa + 3h^3)(\frac{ca^3}{4} - 2P)]$. Donc ſi $\zeta + \delta$ eſt nommé α, on aura, en ôtant ce qui ſe détruit, & mettant pour h ſa valeur $\frac{aa-aq}{\sqrt{[2aq-qq]}}$; $\frac{(f-f).c.a^3.(a-q)}{4p.8b.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}} = \alpha$.

Or pour que le Sinus de réfraction $\frac{h+\alpha}{\sqrt{[aa+(h+\alpha)]^2}}$ ſoit au Sinus d'incidence $\frac{h}{\sqrt{[aa+hh]}}$ en raiſon conſtante, il faut que leur différence $\frac{a^2\alpha}{(aa+hh)^{\frac{3}{2}}}$ ſoit en raiſon conſtante avec $\frac{h}{\sqrt{[aa+hh]}}$; c'eſt-à-dire, que α ſoit en raiſon conſtante avec $\frac{a^3.[a-q]}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui réſulte en effet de l'Equation précédente, puiſque le rapport de ces deux quantités eſt $\frac{(f-f).c}{4p.8b.}$. Donc *lorſque les deux milieux different très-peu l'un de l'autre en réſiſtance, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante.*

REMARQUE V.

277. Supposons présentement que la direction du Cercle en entrant soit presque perpendiculaire à la surface commune des deux Fluides, dans ce cas h étant fort petite, l'Equation C de l'*article* 264 deviendra .....

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{a} c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2.\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} + \frac{h^3}{6a^3} \times$$

$$c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} \times$$

$$\int \left(\frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3} \times \right.$$

$$\left. c^{\int 2dx.[f-f].[a-x]^2.\sqrt{[2ax-xx]}:pba^3} \right) \ldots\ldots (1).$$

Soit au (Fig. 86.) la quantité dont le Cercle est enfoncé, lorsqu'il cesse de décrire la premiere courbe : si on nomme Cu, α, on a $\frac{Cu}{\beta u} = \frac{\alpha}{\sqrt{[a\alpha - \alpha\alpha]}} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha^3}{2a^3} =$ à ce que devient le second membre de l'Equation précédente (1) lorsque $x = au$. Or comme au ne differe de aC que d'une quantité infiniment petite Cu, supposons que $c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$, ou, ce qui est la même chose, ...

$$c^{[f-f].[a-x].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}} + \int aadx\sqrt{[2ax-xx]}):4pba^3}$$

soit égal à $c^{n:a}$ lorsque $x = a$: il est aisé de voir que la valeur de $c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$ lorsque $x = au$, ne differe de $c^{n:a}$ que d'une quantité infini-

ment petite du troiſiéme ordre. Donc en mettant $hc^{n:a}$ pour $hc^{\int(dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$ dans l'Equation (1) on ne négligera qu'une quantité infiniment petite du quatriéme ordre, parce que h eſt infiniment petite. Soit enfin $q =$ à ce que devient la quantité.....

$$\int \frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3} \times c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = au$ ou Ca, & il viendra.....

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha^3}{2aa} = \frac{hc^{n:a}}{a} + \frac{h^3c^{n:a}q}{6a^4}.$$

D'où l'on tire

$\alpha = hc^{n:a} + \frac{h^3c^{n:a}q}{6a^3} - \frac{h^3c^{3n:a}}{2aa}$, quantité qui ne differe de la vraie valeur de Cu, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre tout au plus.

Je dis maintenant que l'angle $aC\alpha$ ou $C\beta u$, que fait la direction $C\alpha$ à l'extrémité de la premiere courbe, avec la perpendiculaire Ca, ne doit différer de l'angle de réfraction, c'eſt-à-dire, de l'angle que fait la direction du centre C à l'extrémité de la ſeconde courbe, avec la perpendiculaire Ca, que d'un angle infiniment petit du quatriéme ordre; car ſi du point O l'on mene la perpendiculaire OF à $C\alpha$, on verra qu'à l'origine de la ſeconde courbe, la force qui pouſſe le centre C ſuivant une perpendiculaire à $C\alpha$, eſt comme CF^3, c'eſt-à-dire, infini-

ment petite du troiſiéme ordre par rapport à $[f - f]$, & cette force va toujours en diminuant le long de la ſeconde courbe, juſqu'à devenir enfin zero abſolu. Or quand même la force qui agit à l'origine de la ſeconde courbe pour pouſſer le centre C perpendiculairement à $C\alpha$, ſeroit ſuppoſée conſtante dans toute l'étendue de cette courbe, qui dans ce cas-ci eſt infiniment petite, ſon action réitérée, ne pourroit (*art.* 271.) diminuer ou augmenter l'angle $aC\alpha$, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Donc à plus forte raiſon l'angle de réfraction ne differe de l'angle $aC\alpha$, & par conſéquent le Sinus de réfraction, du Sinus Cu, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre au plus. On peut donc prendre $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{h^3 c^{3n:a}}{2aa}$, ou même ſimplement $hc^{n:a}$ pour le Sinus de réfraction. Mais cette quantité eſt au Sinus d'incidence $\frac{ah}{\sqrt{[aa+hh]}}$ ou h qui en differe très-peu, comme $c^{n:a}$ eſt à 1, c'eſt-à-dire, en raiſon conſtante. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

Comme les angles d'incidence & de réfraction ſont ici fort petits, les Sinus de ces angles ne different point de leurs tangentes ni des Arcs qui en ſont la meſure. Donc *ces angles & leurs tangentes ſont ici en raiſon conſtante.*

REMARQUE VI.

278. Ayant trouvé dans les deux articles précédens

les Sinus d'incidence & de réfraction en raiſon conſtante, il ſemble d'abord qu'on n'en puiſſe rien conclure pour le rapport des Sinus en général. Néanmoins en examinant la choſe de plus près, on peut s'aſſurer par les calculs de l'*art.* 277, qu'en général les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point en rapport conſtant. Car la quantité $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{h^3 c^{3n:a}}{2aa}$ ne differe tout au plus du véritable Sinus de réfraction, comme nous l'avons prouvé, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Si donc les Sinus d'incidence & de réfraction étoient exactement en raiſon conſtante, comme le Sinus d'incidence eſt ici (*hyp.*) infiniment petit, il ne s'en faudroit tout au plus que d'une quantité infiniment petite du troiſiéme ordre, que le rapport $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{h^3 c^{3n:a}}{2aa}$ au Sinus d'incidence $\frac{ah}{\sqrt{[aa+hh]}}$ ou $h - \frac{h^3}{2aa}$ ne fût conſtant. Mais le rapport de ces deux quantités, à un infiniment petit du troiſiéme ordre près, eſt $c^{n:a} + h^2 (\frac{c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa})$. Pour démontrer qu'il s'en faut plus d'un infiniment petit du troiſiéme ordre, que ce rapport ne ſoit conſtant, il ſuffira de faire voir que la quantité $\frac{c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa}$ dans laquelle il n'entre que des grandeurs finies, n'eſt pas $= 0$; ou, ce qui eſt la même choſe, que q n'eſt pas $= 3a(c^{2n:a} - 1)$, ce que je prouve en cette ſorte : q eſt égal à ce que devient la quantité.....

$$\int \frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pbaa} \times c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$. Mais cette quantité .....

$$\int \frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pbaa} \times c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} =$$

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pb} \times c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} -$$

$$c^{\int 2(dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} + 1.$$

Si donc on prend q pour ce que devient .....

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pb} \times c^{\int 2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$, on aura $q = q - ac^{2n:a} + a$; il faut donc prouver que $q - ac^{2n:a} + a$ n'eſt pas $= 3a(c^{2n:a} - 1)$, ou, ce qui eſt la même choſe, que q n'eſt pas = à $4a \times (c^{2n:a} - 1)$. Or $\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} =$

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times c^{(2.[f-f][a-x].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}+\int aadx\sqrt{[2ax-xx]}):4pba^3} >$$

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} c^{(2.[f-f]\int dx\sqrt{[2ax-xx]}):4pba}$$

tant

tant que x n'eſt pas $> a$. Mais cette derniere quantité $=$ $4(c^{(2.[f-f]\int dx\sqrt{[2ax-xx]}):4pba}-1)$; & lorſque $x=a$, elle eſt $4(c^{2n:a}-1)$; donc $q>4a(c^{2n:a}-1)$. *Ce Q. F. D.* Donc *les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point généralement en raiſon conſtante.*

REMARQUE VII.

279. En faiſant attention aux calculs des *art.* 276 & 277, on verra que ſi *dans les deux cas où nous avons trouvé les Sinus en raiſon conſtante, on prend l'angle de réfraction pour angle d'incidence, c'eſt à dire, ſi on ſuppoſe que le Cercle après s'être enfoncé dans le ſecond Fluide, & y avoir fait quelque chemin, retourne en arriere ſuivant la même direction, & rentre dans le milieu d'où il étoit venu, il reviendra ſous le même angle ſous lequel il étoit entré, c'eſt-à-dire, que l'angle d'incidence deviendra l'angle de réfraction.* Car dans le premier cas, on a $\epsilon=[a-q].\frac{[f-f].c}{4p.8b}$, & le Sinus de réfraction $a-q+\epsilon=[a-q].(1+\frac{[f-f].c}{4p.8b})$; donc en prenant le Sinus de réfraction $a-q+\epsilon$ pour Sinus d'incidence, on trouvera le Sinus de réfraction $=[a-q+\epsilon]\times(1+\frac{[f-f].c}{4p.8b})=a-q+\epsilon.\frac{[f-f].c}{4p.8b}=a-q$.

Dans le ſecond cas, on a trouvé le Sinus de réfraction $a=hc^{\pm n:a}$. Donc ſi on prenoit a pour le Sinus d'in-

cidence, on auroit le Sinus de réfraction $= a\, c^{\mp n:a} = h$. Donc &c.

Mais on peut démontrer qu'il n'en eſt pas de même dans tous les cas, & qu'en général les angles d'incidence & de réfraction ne ſont pas réciproques. Car dans l'*art.* 277, nous avons trouvé $a + \frac{a^3}{2aa} = hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3}$. Or $a + \frac{a^3}{2aa}$ eſt l'expreſſion de la tangente correſpondante au Sinus infiniment petit a, & cette quantité, comme nous l'avons fait voir, ne differe tout au plus de la vraie tangente de l'angle de réfraction, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Donc ſi les angles d'incidence & de réfraction étoient réciproques, il faudroit qu'en prenant $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3}$ pour tangente de l'angle d'incidence, on trouvât pour tangente de l'angle de réfraction une quantité, qui ne différât tout au plus de h que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Car il eſt évident que la tangente qu'on trouvera, ne doit différer que d'un infiniment petit du quatriéme ordre de celle qu'on trouveroit, ſi on prenoit la vraie tangente de réfraction pour tangente de l'angle d'incidence : cela ſe voit par les formules de l'*article* 277. Mais la tangente qu'on trouveroit dans ce dernier cas, ne devroit différer de h que d'un infiniment petit du quatriéme ordre, ſi les angles étoient réciproques. Donc &c.

Suppoſons donc, par exemple, que le paſſage ſe ſoit fait d'abord d'un milieu moin réſiſtant dans un autre plus

réſiſtant : l'on aura $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa} = hc^{+n:a} + \frac{h^3c^{+n:a}q}{6a^3}$.

Prenons maintenant $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa}$ que j'appelle $\mathfrak{C}$, pour tangente de l'angle d'incidence : ſoit $-Q =$ à ce que devient la quantité .....

$$\int^{2.[f-f].dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}_{pbaa} \times$$

$$c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$, & on trouvera la tangente de l'angle de réfraction, $= \mathfrak{C}c^{-n:a} - \frac{\mathfrak{C}^3c^{-n:a}Q}{6a^3}$. Mais l'Equation $\mathfrak{C} = hc^{+n:a} + \frac{h^3c^{+n:a}q}{6a^3}$ donne $h = \mathfrak{C}c^{-n:a} - \frac{\mathfrak{C}^3c^{-n:a}q}{6a^3}$.

Donc la différence de $\mathfrak{C}c^{-n:a} - \frac{\mathfrak{C}^3c^{-n:a}}{6a^3}$ & de h eſt $\frac{\beta^3c^{-n:a}}{6a^3} \times (qc^{-2n:a} - Q)$. Pour prouver que cette différence eſt plus qu'infiniment petite du quatriéme ordre, il ſuffira de faire voir que $qc^{-2n:a}$ n'eſt pas $= Q$, ce que je démontre ainſi.

On a ſuppoſé dans l'*art.* 278, q = à ce que devient la quantité .....

$$\int^{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}_{pb} \times$$

$$c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$, & on a trouvé $q = q - ac^{-2n:a} + a$: ſi on ſuppoſe de même $Q =$ à ce que devient la quantité

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pb} \times$$

$$c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3},$$

lorſque $x = a$, on aura $Q = Q + ac^{-2n:a} - a$. La difficulté ſe réduit donc à prouver que $qc^{-2n:a} > Q$; car il eſt évident que $(q - q)\,c^{-2n:a} = Q - Q$, & qu'ainſi $qc^{-2n:a} - Q = qc^{-2n:a} - Q$. Or $\frac{q}{a}$ eſt ce que devient.....

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times$$

$$c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$; & $\frac{Q}{a}$ eſt ce que devient.....

$$\int \frac{2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times$$

$$c^{\int(2dx.[f-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

la premiere de ces deux quantités, comme il eſt aiſé de le voir, eſt plus grande que

$4(c^{\int(2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}):4pba} - 1)$, & la ſeconde eſt $< 4(-c^{\int(2dx.[f-f].\sqrt{[2ax-xx]}):4pba} + 1)$ tant que x n'eſt pas $> a$. Donc $\frac{q}{Q} > \frac{4(c^{2n:a}-1)}{4(1-c^{-2n:a})}$. Donc $qc^{-2n:a} > Q$. *Ce Q. F. D.* Donc *en général les angles d'incidence & de réfraction ne ſont pas réciproques.* Ce Q. F. D.

§. II.

Des loix de la Réfraction, quand la réſiſtance eſt comme une fonction quelconque de la vîteſſe.

PROBLÊME IV.

280. *Les mêmes choſes étant poſées que dans les Problêmes précédens, avec cette ſeule différence qu'on ſuppoſe maintenant la réſiſtance comme une fonction quelconque de la vîteſſe; on demande la courbe que le Cercle doit décrire.*

La force rétardatrice ſuivant AC (Figure 80.) ſera pour la premiere courbe, (*articles* 259, 260, 262,) $= \frac{4f\phi u}{3\phi g} + \frac{[f-f].\phi u}{3CA^3.\phi g}(3CA^2.(Ee-MF)+MF^3-Ee^3)$; & cette force multipliée par Ci, ſera, ſuivant le Principe connu, égale à $-mudu$. On aura de plus $\frac{[f-f].\phi u}{3AC^3.uu.\phi g} \times (CF^3-Ce^3) \times Ci^2 = m.oi$. En mettant dans la premiere de ces Equations pour MF, Ee, leurs valeurs $\frac{ady-xdy-dx\sqrt{[2ax-xx]}}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$ & $\frac{ady-xdy+dx\sqrt{[2ax-xx]}}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, & dans la ſeconde, pour CF, Ce, oi, leurs valeurs analytiques déja trouvées (Problême II.) on aura deux Equations qui renfermeront x, dx, dy, ddy, u, du avec des conſtantes. Pour les réduire à une ſeule dans laquelle u ne ſe trouve plus, on tirera de chacune de ces deux Equations une valeur de ϕu, & comparant enſemble ces deux valeurs, on aura une Equation qui ne contiendra plus que

uu, du, avec x, dx, dy, ddy, & des conſtantes. On tirera de cette Equation par le calcul intégral, la valeur de u, en x, dx, dy, ddy, & cette valeur de u étant remiſe dans l'une des deux Equations, on en aura une nouvelle qui ne contiendra plus u.

Lorſque la fonction donnée ϕu eſt ſimplement une puiſſance u^n de la vîteſſe, le calcul eſt un peu plus ſimple. Car alors on tirera de la premiere Equation la valeur de $u^{1-n}du$ en x, dx, dy, & l'égalant à la valeur de $u^{1-n}du$ trouvée par la différentiation de la ſeconde Equation, on aura l'Equation de la courbe, en x, dx, dy & $dddy$. Mais comme cette Equation eſt très-compliquée de différentielles, & ne paroît pas intégrable, je crois qu'il eſt inutile de la tranſcrire ici.

Pour avoir l'Equation de la ſeconde courbe, il faudra faire (*art.* 263.) la force rétardatrice ſuivant AC, égale à $\frac{2.[f+f].\phi u}{3.\phi g} + \frac{[f-f].\phi u}{3CA^3.\phi g}(3CA^2.MF - MF^3)$; & la force ſuivant Cb devra être exprimée par $\frac{[f-f].\phi u.CF^3}{\phi g.3CA^3}$.

On achevera enſuite le calcul, comme on a fait pour l'Equation de la premiere courbe.

REMARQUE I.

281. Au reſte, quoique nous ne puiſſions ici conſtruire la courbe, il eſt toujours vrai, 1°. *qu'elle eſt concave vers la perpendiculaire, ſi le milieu où le Cercle entre, réſiſte moins que celui d'où il vient, & au contraire :* 2°. que *le*

centre doit ceſſer de la décrire avant ſon immerſion totale, excepté dans le cas du n. 2, art. 268. Car il eſt évident que les raiſonnemens que nous avons faits pour prouver ces propoſitions dans le cas de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, ſont applicables à toute autre hypothèſe de réſiſtance.

Remarque II.

282. *Si le Cercle* (Fig. 87.) *après avoir paſſé d'un milieu moins réſiſtant dans un plus réſiſtant, & avoir fait quelque chemin dans ce dernier milieu, repaſſe maintenant du ſecond milieu dans le premier; je dis qu'il ne reviendra ni par le même chemin, ni par la même courbe.* Car nous venons de démontrer que le Cercle durant une partie du tems de ſon enfoncement décrit la courbe BC, & durant le reſte du tems, la partie CD, par exemple, de la ligne droite CF. Mais ſi on ſuppoſe que le centre parvenu au point D, retourne avec la direction DC, & rentre dans le Fluide d'où il étoit venu, la réſiſtance du Fluide l'écartera de ſa direction DC, dès le premier inſtant, & l'obligera de décrire la courbe DV.

Il eſt aiſé de faire voir de plus, que la courbe DV n'eſt pas la même que la courbe BC. Car quoique la force qui agit au point D ſuivant DO perpendiculaire à DC, ſoit infiniment petite, auſſi-bien que la force qui agit au point C ſuivant CQ perpendiculaire à DC, néanmoins la premiere de ces deux forces eſt encore infiniment grande par rapport à l'autre. Cela ſe tire aiſément de l'*article* 271. Donc &c.

Quand on ſuppoſeroit que le Cercle commençât à rentrer dans le premier Fluide, dès l'inſtant qu'il ſeroit arrivé au point C, il ſeroit encore facile de prouver par les mêmes Principes, qu'il décriroit une courbe différente de CB. Donc &c.

Il eſt évident que les mêmes raiſonnemens auroient lieu, ſi le Cercle étoit venu d'abord d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant.

LEMME.

283. Si un Corps eſt mû dans un Fluide, dont la réſiſtance ſoit comme une puiſſance n de la vîteſſe, que g ſoit ſa vîteſſe initiale, f la réſiſtance faite par le Fluide à la vîteſſe g, a le tems qu'il faudroit à la force f pour faire perdre au Corps tout ſon mouvement, ſuppoſé que cette force f demeurât conſtante; t le tems écoulé depuis le premier inſtant du mouvement, u la vîteſſe reſtante à la fin du tems t; on aura $\frac{g^{1-n} - u^{1-n}}{[1-n].g^{1-n}} = \frac{t}{a}$; & l'eſpace parcouru pendant le tems t, ſera $\frac{ag^{2-n} - au^{2-n}}{[2-n].g^{1-n}}$. D'où il s'enſuit 1°. que ſi la réſiſtance eſt comme une puiſſance n de la vîteſſe, & que n ſoit $=$ ou > 2, la vîteſſe ne peut jamais être anéantie par la réſiſtance, & que le Cercle décrira pendant un tems infini, un eſpace infini: ſi au contraire $n < 2$, le Cercle ne peut décrire dans le milieu réſiſtant, qu'un eſpace fini: il mettra un tems infini à parcourir cet eſpace, ſi n eſt $=$ ou < 1, & un tems fini, ſi $n > 1$.

2°.

2°. Il s'enſuit encore, que ſi $n < 2$, $\frac{ag}{2-n}$ ſera l'eſpace entier parcouru par le Corps, & qu'ainſi $\frac{au^{2-n}}{[2-n].g^{1-n}}$ exprimera l'eſpace qui lui reſte à parcourir depuis le point où la vîteſſe eſt u, juſqu'au point de repos.

Remarque III.

284. On peut aiſément conclure du Lemme précédent, que dans le cas de $n =$ ou > 2, la réſiſtance des deux Fluides n'empêchera point le Cercle de décrire la courbe entiere; & qu'au contraire dans le cas de $n < 2$, la réſiſtance pourra être telle, que le Cercle ne décrive qu'une partie de la Courbe.

Or le rayon de la développée $\frac{Ci^2}{oi}$ eſt comme $\frac{u^{2-n}}{CF^3 - Ce^3}$ dans la 1re courbe (Fig. 80), & comme $\frac{u^{2-n}}{CF^3}$ dans la ſeconde (*art.* 269 *&* 280.) D'où il s'enſuit 1°. que le rayon de la développée eſt toujours infini à l'origine. 2°. Qu'il eſt encore infini à l'autre extrémité, ſi le Cercle peut y arriver ſans que u ſoit o. 3°. Que ſi le Cercle ne peut décrire qu'une partie de la courbe, à l'extrémité de laquelle u ſera par conſéquent $= o$, le rayon de la développée ſera $= o$ à l'extrémité de cette partie. 4°. Que ſi u & CF ſont zero en même-tems, c'eſt-à-dire, ſi la vîteſſe eſt préciſément nulle à l'exrémité de la courbe, alors, prenant un point infiniment proche de cette extrémité, & appellant s la diſtance de ce point à l'extrémité de la

courbe, on trouvera (*article* 283, *n.* 2,) que u^{2-n} eſt comme s, & qu'ainſi le rayon de la développée pour ce point, ſera comme $\frac{s}{CF^3}$; or en premier lieu, ſi le paſſage ſe fait d'un milieu moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant, il eſt aiſé de prouver qu'on a $s > CF$. Donc $\frac{s}{CF^3}$ eſt infini. Si le paſſage ſe fait dans un milieu moins réſiſtant, alors prenant CF infiniment petit du premier ordre, on trouvera que l'angle de contingence eſt infiniment petit du troiſiéme, puiſque cet angle eſt comme $su^{n-2}.CF^3$ (*art.* 271 & 273.) & par conſéquent comme CF^3. D'où il s'enſuit que s ne différe de CF que d'une quantité infiniment petite du troiſiéme ordre, tout au plus. Donc $\frac{s}{CF^3}$ eſt encore infini.

REMARQUE IV.

285. Si on ſuppoſe dans le Problême précédent, que chacune des réſiſtances f, f ſoit très-petite, enſorte que $f-$ f & $f+$ f ſoient chacune de très-petites quantités, il eſt clair que la réſiſtance ne peut diminuer la vîteſſe que très-peu. Si donc dans l'Equation $\frac{[f-f]\cdot\phi u}{3CA^3.uu.\phi g}(CF^3-Ce^3)\times Ci^2 = m.oi$, on prend g pour la vîteſſe initiale, on pourra mettre g à la place de u & à la place de g^2 ſa valeur $\frac{2pb}{m}$, ce qui donne $\frac{[f-f]}{3CA^3.2pb}\left(\frac{CF^3-Ce^3}{3CA^3}\right)\times Ci^2 = oi$ &

$\frac{[f-f].CF^3.Ci^2}{2pb.3CA^3} = oi$. Ces Equations ne different point de celles que nous avons données pour le cas de $[f-f]$ très-petite, dans l'hypothèse de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe. Il y a ſeulement cette différence, que dans l'hypothèſe de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, la donnée $g^2 = \frac{2pb}{m}$ exprimoit une vîteſſe donnée à volonté, au lieu qu'ici elle exprime la vîteſſe initiale.

De-là il s'enſuit 1°. (*art.* 276.) *que ſi on ſuppoſe* $[f+f]$ *&* $[f-f]$ *toutes deux très-petites, c'eſt-à dire, que chacun des deux milieux réſiſte peu, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante, quelque hypothèſe que l'on faſſe ſur la Loi de la réſiſtance.*

2°. On a par l'*art.* 276, $\alpha = \frac{[a-q].[f-f].ca^3}{4p.(2aq-qq)^{\frac{1}{2}}.8b}$, d'où il eſt clair que $a-q$ reſtant la même dans cette Equation, c'eſt-à-dire, le Sinus d'incidence reſtant le même, la quantité α, qui exprime ce dont la tangente de l'angle d'incidence doit être augmentée pour devenir la tangente de l'angle de réfraction, ſera comme $\frac{[f-f]}{2pb}$ ou comme $\frac{[f-f]}{gg}$, en ſuppoſant que m reſte la même. Mais $\frac{[f-f]}{gg}$ eſt comme $\frac{\varphi g}{gg}$, & ſi on prend $\varphi g = g^n$, on trouve que $\frac{[f-f]}{gg}$ eſt comme g^{n-2}. donc α eſt comme g^{n-2}. D'où il s'enſuit, 1°. que ſi $n = 2$, α ſera la même, quelle

que ſoit la vîteſſe initiale g, ce qui a déja été prouvé *art.* 276 : 2°. que ſi $n > 2$, α ſera d'autant plus petite que g ſera plus petite ; *la réfraction ſera donc d'autant moindre dans le cas de* $n > 2$, *que la vîteſſe initiale ſera moindre :* 3°. enfin, ſi $n < 2$, il eſt clair que *la réfraction ſera d'autant moindre que la vîteſſe initiale ſera plus grande, & au contraire.*

REMARQUE V.

286. Nous venons de voir que quand les milieux réſiſtent peu, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante, quelque hypothèſe que l'on faſſe ſur la Loi de la réſiſtance. Nous avons fait voir de plus, (*article* 276.) que dans le cas particulier de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, les Sinus ſont encore en raiſon conſtante, lorſque les deux milieux different peu l'un de l'autre en réſiſtance, quelle que ſoit d'ailleurs la réſiſtance particuliere de chacun : mais il ne faut pas ſe hâter de conclure qu'il en eſt de même dans toute autre hypothèſe ſur la réſiſtance, lorſque $f - f$ eſt très-petite, $f + f$ demeurant finie : car l'expreſſion du rapport des Sinus dans ce cas-là, n'eſt point égale à une quantité conſtante.

Pour le démontrer ; toutes choſes demeurant les mêmes que dans l'*art.* 276, on aura pour la premiere courbe

$$dz = \frac{2.[f-f]\phi u}{3muu\phi g.a^5}\left(3.aa.[a-x]^2\,hdx\sqrt{[2ax-xx]} + h^3dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}\right) \quad (G)$$

& pour la seconde courbe

$dz = \frac{2.[f-f]\phi u}{3muu\phi g.a^3}.dx(aa-ax+h\sqrt{[2ax-xx]})^3..(H)$.

Soit $\frac{2.[f-f]}{m\phi g}\epsilon =$ à ce que devient l'intégrale du second membre de l'Equation G, lorsque $x = q$; & $\frac{2.[f-f]}{m\phi g}\gamma =$ à ce que dévient l'intégrale du second membre de l'Equation H lorsque $x = 2a-q$, cette intégrale étant zero quand $x = q$; & l'on trouvera α, qui est l'excès de la tangente de l'angle de réfraction sur la tangente de l'angle d'incidence, égale à $\frac{2.[f-f]}{m\phi g}(\epsilon+\gamma)$. La question se réduit donc à prouver que α n'est pas en rapport constant avec $\frac{a^3.(a-q)}{[2aq-qq]^{\frac{3}{2}}}$, ou, ce qui est la même chose, à cause de la quantité constante $\frac{2.[f-f]}{m\phi g}$, que $\epsilon+\gamma$ n'est pas $= R.\frac{a^3.(a-q)}{[2aq-qq]^{\frac{3}{2}}}$. R exprimant une quantité constante.

La difficulté principale est d'avoir l'expression de $\frac{\phi u}{uu}$ en x. Car comme $\frac{\phi u}{uu}$ entre dans l'expression de ϵ & de γ, on ne peut sans cela trouver la valeur analytique de ces quantités. Mais cet inconvénient disparoîtra, si l'on fait les remarques suivantes.

1°. Quelle que soit l'expression de $\frac{\phi u}{uu}$ en x, il est au moins certain, que les deux milieux différant peu l'un

de l'autre, comme on le suppose ici, cette expression sera la même, que si les deux milieux n'en faisoient qu'un seul, & que le centre C décrivît la droite CA. 2°. Dans ce cas, l'Equation entre x & u sera $\frac{4f\Phi u.dx\sqrt{[aa+hh]}}{3m\Phi g.a} = -udu$, & la quantité $\frac{\Phi u}{uu}$ quelle qu'elle soit, contiendra f, m, g, & $\frac{x\sqrt{[aa+hh]}}{a}$. Ainsi ϵ & γ ne renfermeront que des grandeurs finies, dont aucune ne différera infiniment peu de l'autre. Donc si $\epsilon + \gamma$ n'est pas exactement $= R \times \frac{a^3(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, ces deux quantités ne différeront nécessairement l'une de l'autre d'une grandeur finie.

Or, si f étant finie, $\epsilon + \gamma$ étoit exactement égale à $R \times \frac{a^3(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, elle le seroit encore f étant infiniment petite. Prouvons donc que quand f est infiniment petite, $\epsilon + \gamma$ n'est pas exactement égale à $R.\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$.

Dans ce cas, l'Equation $\frac{4f\Phi u.dx\sqrt{[aa+hh]}}{3m\Phi g.a} = -udu$ devient $\frac{4fdx\sqrt{[aa+hh]}}{3mag} = -du$, & $u = g - \frac{4fx\sqrt{[aa+hh]}}{3ma}$. De plus, si on prend Vdu pour la différence de $\frac{\Phi u}{uu}$, & qu'on appelle G ce que devient V, en y mettant g à la place de u, on aura, lorsque f est infiniment petite, $\frac{\Phi u}{uu} =$

$\frac{}{gg} - \frac{G.4fx[aa+hh]}{3mag}$, à un infiniment petit du second ordre près.

De-là, après un assez long calcul, mais qu'on peut abréger par différentes voies, on tire

$\varepsilon+\gamma = \frac{ca^3.(a-q)}{3a.(2aq-qq)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\phi g}{gg} - \frac{G.4fV[aa+hh]}{3mg}\right) + \frac{G.4fV[aa+hh]}{5.9ma^6g}[5ha^4.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}} + (h^3-3haa)\times (2aq-qq)^{\frac{5}{2}} + a^3.(a-q)^5 + 5hha^3.(a-q)^3 - 3hha.(a-q)^5]$. Cette valeur de $\varepsilon+\gamma$ ne differe de la véritable que d'un infiniment petit du second ordre, il faudroit donc qu'elle ne s'éloignât d'être un multiple de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$ que d'un infiniment petit du second ordre, ou, ce qui est la même chose, il faudroit qu'en mettant dans la quantité précédente, pour h sa valeur $\frac{aa-aq}{V[2aq-qq]}$, cette quantité se divisât exactement par $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, & que le quotient ne contînt point q. Or il est aisé de voir au premier coup d'œil que cela n'est pas. Donc &c.

Il est à remarquer, que quand $\frac{\phi u}{uu}$ est une quantité constante, c'est-à-dire, quand $\phi u = uu$, alors, & dans ce seul cas $V=0$, & par conséquent $G=0$, & $\varepsilon+\gamma$ est un multiple exact de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{1}{2}}}$ comme on l'a déja vû (*article* 276.)

Donc *quand les deux milieux ſont chacun d'une réſiſtance finie, & qu'ils different infiniment peu l'un de l'autre, les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont en raiſon conſtante, que dans le ſeul cas où la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe.*

COROLLAIRE I.

287. De-là & de l'*article* 278, il s'enſuit, qu'*il n'y a aucune hypothèſe ſur la réſiſtance où les Sinus ſoient généralement en raiſon conſtante.*

On peut encore démontrer cette derniere propoſition, pour tous les cas poſſibles de réſiſtance, excepté celui où elle eſt comme le quarré de la vîteſſe, en ſuppoſant dans l'*art.* 286, f & f chacune infiniment petite du premier ordre, & $[f - f]$ infiniment petite du ſecond. En effet, multipliant par $\frac{2.[f-f]}{m\Phi g}$ la valeur de $\varepsilon + \gamma$ trouvée (*art.* 286.) on auroit l'expreſſion de α à un infiniment petit du quatriéme ordre près, & on trouveroit qu'il s'en faudroit plus d'un infiniment petit du quatriéme ordre, que cette valeur de α ne fût un multiple de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$. Mais cette démonſtration engageroit en d'aſſez longs diſcours, par la néceſſité d'avoir égard aux quantités qu'on négligeroit; d'ailleurs la démonſtration donnée (*art.* 286.) a cet avantage, qu'elle fait voir que les Sinus ne ſont pas en raiſon conſtante, non-ſeulement lorſque $[f - f]$ eſt finie, mais encore lorſqu'elle eſt infiniment petite.

COR. II.

COROL. II.

288. *Les tangentes ni les ſécantes des angles d'incidence & de réfraction, ne ſont jamais en rapport conſtant, quelque hypothèſe qu'on faſſe ſur la réſiſtance.*

Car 1°. lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, & que $f - f$ eſt fort petite, nous avons fait voir (*art.* 278.) que les Sinus ſont en raiſon conſtante. Donc les tangentes ni les ſécantes ne ſont pas en rapport conſtant, lorſque $f - f$ eſt fort petite. Donc en général elles ne ſont pas en rapport conſtant.

2°. Dans toute autre hypothèſe que celle de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, il faudroit pour que les tangentes fuſſent en raiſon conſtante, que α ou $\varepsilon + \gamma$ fût un multiple exact de $\frac{aa - aq}{\sqrt{[2aq - qq]}}$, ce qu'on prouvera être impoſſible, comme on a fait voir (*art.* 286.) que $\varepsilon + \gamma$ n'eſt pas un multiple exact de $\frac{a^3 . (a - q)}{(2aq - qq)^{\frac{1}{2}}}$. Pour que les ſécantes fuſſent en raiſon conſtante, il faudroit que $\frac{\alpha h}{aa + hh}$ fût une quantité conſtante, c'eſt-à-dire, que α fût un multiple exact de $\frac{a^3}{(a - q)\sqrt{[2aq - qq]}}$, ce qui peut encore être démontré impoſſible de la même maniere. Donc &c.

REMARQUE VI.

289. Il ne ſera pas inutile d'obſerver ici que *les propoſitions démontrées* (art. 286 & 287.) *ſont également vraies, quand même le rayon du Cercle ſeroit infiniment petit.* Car l'Equation $\frac{4f\phi u}{3m\phi g} \times \frac{dx.\sqrt{[aa+hh]}}{a} = -udu$, & les Equations G, H, font voir que toutes choſes d'ailleurs égales, deux Cercles, dont l'un ſeroit fini, l'autre infiniment petit, ſouffriroient dans le cas de l'*art.* 286, la même réfraction. Donc &c.

REMARQUE VII.

290. Nous avons prouvé dans l'*art.* 277, que *quand la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, & que l'angle d'incidence eſt fort petit, les Sinus des angles d'incidence & de refraction ſont en raiſon conſtante.* Nous allons démontrer que cette propoſition eſt vraie dans toutes ſortes d'hypothèſe de réſiſtance.

En effet pour avoir en général l'Equation de la courbe, il ne faut que mettre dans l'Equation (1) de l'*art.* 277, $\frac{[f-f]\phi u}{muu\phi g}$ au lieu de $\frac{[f-f]}{2pb}$, en négligeant le terme où eſt h^3, & on verra, que le rapport du Sinus de réfraction au Sinus d'incidence eſt exprimé par ce que devient la quantité ..... $c^{2\int(dx[f-f]\phi u.[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):muu\phi ga^3}$ lorſ-

que $x = a$; or comme l'angle d'incidence eſt ici ſuppoſé fort petit, la viteſſe u, lorſque le centre eſt enfoncé de la quantité x doit être cenſée la même, que ſi le paſſage ſe faiſoit perpendiculairement d'un Fluide dans l'autre

Donc g étant conſtante, $\frac{\partial u}{u\,u}$ eſt toujours la même lorſque $x = a$. Donc &c.

Il eſt encore évident que *dans le cas précédent & dans celui de l'*art. 286, *les angles d'incidence & de réfraction ſont réciproques*. Cela ſe prouve comme dans l'*art.* 279.

On peut encore tirer ſans beaucoup de peine de l'article préſent & de l'*article* 286, une nouvelle démonſtration des Propoſitions qu'on a prouvées (*art.* 285.)

Remarque VIII.

291. On a démontré dans l'*art.* 279, *que les angles d'incidence & de réfraction ne ſont point réciproques, lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe.* Nous allons faire voir *que ces mêmes angles ne ſont réciproques dans aucune hypothèſe*; ce qu'on doit être déja aſſez porté à croire, après ce qui a été dit (*article* 282.)

Pour démontrer cette Propoſition, nous ſuppoſerons que l'angle d'incidence ſoit fort petit; que les réſiſtances f, f, ſoient chacune très-petite, & de plus que f — f ſoit infiniment petite par rapport à chacune d'elles, c'eſt-à-dire, ſi l'on veut, que f ſoit infiniment petite du premier ordre, & f — f du ſecond.

Nous mettrons dans l'Equation (1) de l'*article* 277,

$\frac{[f-f]\phi u}{muu.\phi g}$ pour $\frac{[f-f]}{2pb}$: de plus, l'Equation $(\frac{4f\phi u}{3\phi g} + \frac{[f-f]\phi u}{3CA^3.\phi g}[3CA^2.(Ee-MF)+MF^3-Ee^3])\times \frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{a} = -mudu$, trouvée dans l'*art.* 280, fait voir que la valeur approchée de $\frac{\phi u}{muu\phi g}$, si $\phi u = u^n$, sera, à un infiniment petit du troisiéme ordre près.....

$$1:(2pb-(2-n)[\frac{4fx}{3}+\frac{[f-f]}{3a^3}(3aa.\int 2dx\sqrt{[2ax-xx]}-2\int dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}})]).$$

Préſentement, ſi on ſe reſſouvient que $c^t = 1+t+\frac{tt}{2}$ &c. on trouvera que la tangente de l'angle de réfraction eſt

$$\frac{h}{a}[1+(f-f)P+(2-n).f.(f-f)K+(f-f)^2\times(\frac{P^2}{2}+[2-n].\Gamma)+(f-f).ff.T]+h^3(f-f)Q,$$

P, T, K, Γ, Q, étant des quantités finies, & des fonctions de a dans leſquelles f ni f n'entrent point. On remarquera que cette expreſſion ne differe de la vraie valeur de la tangente qu'on cherche, que d'un infiniment petit du ſixiéme ordre. Donc ſi les angles d'incidence & de réfraction ſont réciproques, il faut qu'en prenant cette expreſſion pour tangente de l'angle d'incidence, on trouve pour tangente de l'angle de réfraction, une quantité qui ne differe de h que d'un infiniment petit du ſixiéme ordre tout au plus.

En nommant α la tangente de l'angle de réfraction trouvée ci-deſſus, on a

$h = \alpha : (1 + [f - f]P + (2 - n).f.[f - f]K + [f - f]^2 \times (\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) + [f - f].ff.T) - \alpha^3.[f - f]Q =$

$\alpha(1 - [f - f]P - [2 - n].f.[f - f]K + [f - f]^2 \times P^2 - [f - f]^2(\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) - [f - f].f^2 T) -$

$\alpha^3[f - f]Q$: & ſi on prenoit α pour la tangente de l'angle d'incidence, on auroit pour celle de l'angle de réfraction

$\alpha(1 - [f - f]P - [2 - n].f.[f - f]K + [f - f]^2 \times (\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) - [f - f].ff.T) - \alpha^3[f - f]Q.$

La différence de cette quantité & de la valeur de h trouvée ci-deſſus, eſt (en négligeant les quantités infiniment petites du ſixiéme ordre) $[2 - n].\alpha.[f - f]^2 \times (K - 2\Gamma)$. Or $\alpha[f - f]^2$ étant une quantité infiniment petite du cinquiéme ordre, il ſuffira pour faire voir que $\alpha.[f - f]^2(K - 2\Gamma)$ eſt plus qu'infiniment petite du ſixiéme ordre, de démontrer que l'expreſſion $K - 2\Gamma$, qui ne renferme que des quantités finies, n'eſt pas $= 0$. Or K eſt égale à ce que devient

$\int(8dx.(a - x)^2.x\sqrt{[2ax - xx]}) : 3a^3(2pb)^2$ lorſque $x = a$, & 2Γ égale à ce que devient dans le même cas $2\int(\frac{2dx.(a-x)^2\sqrt{[2ax-xx]}}{3a^6(2pb)^3}[3.aa.\int 2dx\sqrt{[2ax - xx]} - 2\int dx.(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}])$. La quantité K s'intégre ſimplement par la quadrature du Cercle. L'autre quantité eſt l'in-

tégrale de $\frac{4}{a^3(2pb)^2}\left(\frac{d[(a-x).(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}]+aadx\sqrt{[2ax-xx]}}{4}\right)\times$ $[3\int\frac{aadx\sqrt{[2ax-xx]}}{2}-\frac{2.(a-x).(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4.3.a^3}]$; d'où l'on voit qu'il doit se trouver dans la différentielle, la quantité $dx\sqrt{[2ax-xx]}\int dx\sqrt{[2ax-xx]}$ qui ne sera détruite par aucune autre, & dont l'intégrale $\frac{(\int dx\sqrt{[2ax-xx]})^2}{2}$ renfermera lorsque $x=a$, le quarré de la circonférence. Donc $K-2\Gamma$ n'est pas $=0$.

Donc *la résistance étant comme une puissance quelconque de la vîtesse autre que le quarré, les angles d'incidence & de réfraction ne sont pas réciproques.*

La démonstration précédente s'étend aux cas où φu est non-seulement u^n, mais une fonction quelconque de la vîtesse. Car en général $\frac{\varphi u}{uu\varphi g}$ peut être exprimé par $\frac{1}{2pb}+G\left(\frac{4fx}{3}+\frac{[f-f]}{3a^3}[3aa.\int 2dx\sqrt{[2ax-xx]}-2\int dx.(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}]\right)+Bf^2\Delta x$, Δx exprimant une fonction de x, & G, B, des quantités qui dépendent de la différentiation de $\frac{\varphi u}{uu}$, & qui ne sont nulles que quand $\frac{\varphi u}{uu}$ est constante, c'est-à-dire, quand $\varphi u=u^2$. Or ce qui pourroit empêcher la démonstration précédente de s'appliquer à ce cas-ci, c'est la quantité $Bf^2\Delta x$; mais cette quantité $Bf^2\Delta x$ doit s'évanouir dans le calcul, & il n'y a que les quantités affectées de $[f-f]^2$ qui doivent y rester. Donc &c.

De-là & de l'*art.* 279, il s'enſuit qu'*en général dans aucune hypothèſe de réſiſtance, les angles d'incidence & de réfraction ne ſont reciproques.*

§. III.

Des Loix de la réfraction, lorſque le mobile eſt peſant.

PROBLÊME V.

292. *Trouver la courbe que décrit un Cercle peſant, lorſqu'il paſſe d'un Fluide dans un autre.*

Soit CA (Fig. 88.) la direction du centre C dans un inſtant quelconque, où la quantité de l'enfoncement eſt EaM : ſoit l'effort abſolu de la peſanteur, repréſenté par CG, & décompoſé en deux autres; l'un ſuivant CL, l'autre ſuivant CH. Il eſt clair que ſi le paſſage ſe fait d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, l'effort du Fluide pour écarter le centre C de ſa direction CA, ſera auſſi dirigé ſuivant CH : la courbe dans ce cas ſera donc concave dans toute ſon étendue vers la perpendiculaire Ca. Si au contraire le paſſage ſe fait d'un milieu moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant, alors, l'effort du Fluide étant dirigé ſuivant CQ, pourra l'emporter ſur l'effort ſuivant CH; mais je dis qu'il ne pourra l'emporter que dans la partie moyenne de la courbe. Car ſi la peſanteur n'agiſſoit que ſuivant CL, pour accélérer le mouvement le long de la courbe, & nullement ſuivant CH, il eſt évident (*art.* 269 & 284.) que le rayon de la développée ſeroit infini aux deux extré-

mités de la courbe; mais la pesanteur agissant seule & suivant CH, le centre C décriroit à ces deux extrémités un petit Arc de courbe dont le rayon osculateur seroit fini; donc la courbe à ses deux extrémités doit tourner sa concavité vers la perpendiculaire. Donc elle ne peut être convexe que dans sa partie moyenne.

Pour avoir l'Equation de cette courbe, on nommera la pesanteur p, & on trouvera pour la premiere courbe (Figure 80.)

$$pdx + Ci\left(\frac{[f+f]\cdot\phi u}{3CA^3\cdot\phi g}[3AC^2(Ee-MF)+MF^3-Ee^3]\right)+\frac{4f\phi u}{3\phi g}\times Ci = mudu.$$

$$\&\frac{pV[dx^2+dy^2].dy}{uu}-\frac{Ci^2}{uu}\left(\frac{[f-f]\cdot\phi u}{3CA^3\cdot\phi g}[CF^3-Ce^3]\right)=m.oi.$$

On chassera u de ces deux Equations par la même Méthode qu'on a employée dans l'*article* 280, & on aura l'Equation de la premiere courbe en x, ddy, $dddy$. De même pour avoir la seconde courbe, on se servira des Equations

$$pdx + Ci\left(\frac{2\cdot[f+f]\cdot\phi u}{3\cdot\phi g}+\frac{[f-f]\cdot\phi u}{3CA^3\cdot\phi g}[3CA^2.MF-MF^3]\right) = mudu.$$

$$\&\frac{pdyV[dx^2+dy^2]}{uu}-\frac{Ci^2}{uu}\left(\frac{[f-f]\cdot\phi u}{3CA^3\cdot\phi g}[CF^3-Ce^3]\right)=m.oi.$$

Si on veut que les indéterminées soient séparables dans les Equations précédentes, on supposera que les quantités p, f, f soient très-petites. La courbe décrite durant le

le paſſage ſera très-peu différente d'une droite, & la vîteſſe, peu augmentée d'un côté par la peſanteur, & peu diminuée de l'autre par la réſiſtance, pourra être regardée comme conſtante. Si donc on prend $g = \sqrt{\frac{[2pb]}{m}}$ pour la vîteſſe initiale, on aura pour la premiere courbe, (en mettant pour CF, Ce, oi, leurs valeurs analytiques déja trouvées Probl. II, & faiſant $ady = (z+h).dx$)....

$$\frac{3pdx.h.(hh+aa)}{2pb} - \frac{[f-f]}{a^3}(6.aa.[a-x]^2.hdx\times \sqrt{[2ax-xx]}+2h^3dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}) = -3a^2dz.$$

Equation d'où l'on peut tirer aiſément la valeur de z en x.

On trouvera de même l'Equation différentielle en z & en x pour la ſeconde courbe.

Si dans ces Equations on ſuppoſe $dz = 0$, on aura les valeurs de x qui porteront aux points d'inflexion des deux courbes.

Il eſt à remarquer que ces valeurs de x ne doivent pas être plus grandes que q pour la premiere courbe, en prenant $a-q$ pour le Sinus d'incidence : & pour la ſeconde courbe, les valeurs de x ne doivent pas être plus grandes que $2a-q$.

La force ſuivant Cb eſt dans le cas préſent la plus grande qu'il eſt poſſible, lorſque le centre eſt arrivé à l'extrémité de la premiere courbe; cela ſe peut voir aiſément. Si l'action de la peſanteur ſuivant CB eſt plus petite que la plus grande valeur de la force ſuivant Cb, il y aura deux points d'inflexion, un ſur la premiere & un ſur la ſeconde

courbe. Dans tout autre cas, la courbe ſera entiérement concave vers *Ca*.

En ſuivant les mêmes raiſonnemens & conſervant les mêmes noms que dans l'*article* 276, on trouvera

$$\frac{a.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}{a^3.(a-q)} = \frac{q-2a}{2b} + \frac{[f-f].c}{4p.8b};$$

On voit par-là que *les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point en raiſon conſtante, lorſque le Cercle eſt ſuppoſé peſant: qu'il y a même des cas où les Sinus d'incidence & de réfraction ſont égaux*, ſavoir lorſque $a-q=-a+\frac{[f-f].c}{16p}$.

Au reſte, comme le Cercle eſt ici ſuppoſé peſant, il eſt clair que même après ſon immerſion dans le nouveau milieu, il continue à décrire une courbe: ainſi dans le cas dont il s'agit, il n'y a point de réfraction proprement dite; lorſque le Cercle a ceſſé de décrire la ſeconde courbe, c'eſt-à-dire, dès qu'il préſente une moitié entiere à l'action du ſecond Fluide, il commence à décrire une troiſiéme courbe toute différente des deux premieres, & qui n'eſt, à proprement parler, que la trajectoire dans un milieu réſiſtant; nous ne dirons rien ici de cette trajectoire, dont la recherche n'eſt point de notre ſujet, quant à préſent, & que Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, &c. ont trouvée il y a déja long-tems.

Remarque I.

293. Si la peſanteur eſt ſuppoſée finie, & les réſiſ-

tances f, f chacune infiniment petite, la courbe décrite différera très-peu d'une parabole: de-là il eſt aiſé de conclure (*Prop.* 94, *Liv.* 1, *Sect.* 14, *des Princip. Math.*) que les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante, pourvû qu'on ſuppoſe le rayon a conſtant, auſſi-bien que la vîteſſe initiale.

Pour pouvoir donc appliquer cette Théorie à la réfraction de la lumiere, il faut ſuppoſer que les rayons à leur approche de la ſurface réfringente, ſont pouſſés vers cette ſurface par une force infiniment grande, pour ainſi dire, par rapport à la réſiſtance qu'ils éprouvent dans chacun des deux milieux.

Comme la recherche de la courbe de réfraction dans le cas préſent, où nous ſuppoſons la peſanteur finie, & la réſiſtance des milieux fort petite, renferme quelques difficultés, nous finirons cette ſection par la ſolution de ce Problême.

Il eſt viſible, en premier lieu, que les réſiſtances f, f étant infiniment petites, non-ſeulement la courbe cherchée différera très-peu d'une parabole, mais encore, que la vîteſſe à chaque point de la courbe ſera la même à peu près que dans une parabole. Or la vîteſſe à chaque point de la parabole ſeroit $\surd[2pb+2px]$; par conſéquent $\surd[2pb+2px]-t$, exprimera la vîteſſe à chaque point de la courbe, t étant une quantité très-petite. D'ailleurs, l'Equation de la parabole ſeroit, comme il eſt aiſé de le trouver, $dy=hdx:\surd[aa+\frac{aax+hhx}{b}]$: ainſi nous ſup-

poſerons le dy de la courbe, égal à $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax+hhx}{b}]}$ $+ \frac{z\,dx}{a}$, z étant de même une quantité fort petite.

On aura donc $uu = 2pb + 2px - 2t\sqrt{[2pb - 2px]}$ & la premiere Equation ſera, en ôtant ce qui ſe détruit de part & d'autre .....

$\frac{[f-f].\phi u.Ci}{3CA^3.\phi g}(3CA^2.[Ee - MF] + MF^3 - Ee^3) + \frac{4f\phi u}{\phi g} \times Ci = dt\sqrt{[2pb + 2px]} + \frac{tpdx}{\sqrt{[2pb+2px]}}$: on ſubſtituera dans le premier membre, pour MF & Ee leurs valeurs trouvées (*art.* 280), mais dans ces valeurs il faudra à la place de dy, mettre ſimplement ....., $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax+hhx}{b}]}$; on mettra de même $\sqrt{[2pb+2px]}$, à la place de u, parce que les termes où entreroient t & z, ſeroient nuls par rapport aux autres. Par-là on aura en intégrant une valeur de $t\sqrt{[2pb+2px]}$ exprimée en x, que je ſuppoſerai pour abréger, égale à $f\int dx\Psi x + f\int dx\Delta x$.

Dans l'autre Equation

$(I) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{pdy.(dx^2+dy^2)}{uu} - \frac{[f-f].\phi u}{\phi g.3a^3} \times [(adx - xdx + dy\sqrt{[2ax-xx]}^3) - (adx - xdx - dy \times \sqrt{[2ax - xx]})^3] = -dxddy$, on ne doit ſubſtituer ſimplement $\sqrt{[2pb + 2px]}$ à la place de u, ainſi que $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax+hhx}{b}]}$ à la place de dy, que dans la partie du premier membre, dont tous les termes ſont multi-

pliés par la quantité très-petite $f - f$. Car en opérant de la même maniere dans la partie $\frac{p\,dy\,(dx^2+dy^2)}{uu}$, dans laquelle p eſt une quantité finie, on négligeroit des quantités de même eſpéce que celles qui ſont multipliées par $f-f$; il faudra donc ſeulement y négliger les termes où z & t ſe trouveroient à-la-fois : mettant enſuite au lieu de $t\sqrt{[2pb+2px]}$ ſa valeur $f\int dx\Psi x + f\int dx\,\Delta x$ dans l'Equation (I), on aura une Equation différentielle qui ne contiendra que x, dx, avec des conſtantes, & la différentielle dz avec z ſeulement au premier degré; d'où l'on voit qu'il ſera aiſé d'en tirer par le calcul intégral, la valeur de z en x.

Il eſt facile maintenant de trouver par les Principes déja expliqués, le point où doit finir la premiere courbe, & de déterminer auſſi la nature de la ſeconde courbe, en uſant des mêmes précautions que pour la premiere. Ainſi nous croyons qu'il n'eſt pas néceſſaire d'aller plus loin.

REMARQUE II.

294. J'obſerverai en finiſſant cette ſection, que quoique nous ayons fait juſqu'ici abſtraction de la peſanteur des deux Fluides, on peut cependant y avoir égard, ſi l'on veut : il n'en réſultera d'autre changement dans les Problêmes précédens, ſinon que la peſanteur du mobile, au lieu d'être conſtante, ſera variable à chaque inſtant, & pourra même quelquefois devenir négative. Il ne faut pas

croire, au reſte, que le centre de gravité du mobile ſoit différent ici de ſon centre de figure. Car la diminution de ſon poids ne procéde que de l'action du Fluide ſur ſa ſurface, & cette action eſt toujours dirigée ſuivant une ligne qui paſſe par le centre, de maniere que les efforts ſe réuniſſent toujours ici au centre du Cercle.

SECTION II.

De la Réfraction de la Sphere.

Préparation pour les propoſitions ſuivantes.

295. Suppoſons qu'une Sphere s'enfonce dans un Fluide quelconque, & que CA (Fig. 89.) ſoit la direction du centre C dans un inſtant de l'immerſion. Imaginons un grand Cercle NEM, dont le plan paſſe par CA, & ſoit perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Que EaM ſoit le profil, ou la coupe de la partie enfoncée, & ſoit imaginé le demi-Cercle $E\epsilon M$, perpendiculaire au plan NEM. Il eſt clair que le ſegment circulaire EaM diviſe la partie enfoncée de la Sphere, en deux parties égales, dont l'une eſt $E\epsilon MaE$, & l'autre doit être imaginée de l'autre côté du plan EaM.

Maintenant par deux points quelconques P, p, pris ſur la ligne CA infiniment près l'un de l'autre, ſoient menées les lignes PQ, pq perpendiculaires à CA & parallèles à CB, & par les lignes PQ, pq, faites paſſer les plans $PQ\epsilon$, pqc, perpendiculaires au plan NEM; leurs communes ſections avec le ſegment $E\epsilon MaE$ formeront les Arcs $Q\epsilon$, qc, qui renfermeront la petite zone par-

tielle $Q \varepsilon c q$, dont la ſemblable eſt de l'autre côté du plan $E a M$.

Il s'agit de trouver la réſiſtance que fait le Fluide à ces deux petites Zones, mûes ſuivant la direction QK parallèle à CA; ce qu'il en réſulte d'effort contre le centre C, & la direction de cet effort; afin d'avoir, en intégrant, la réſiſtance que ſouffre le centre C, de l'impreſſion du Fluide contre la partie $E \varepsilon M a E$, & contre la partie ſemblable, qui eſt de l'autre côté du plan $E a M$.

Pour cela, je prolonge d'abord la ligne CA vers N, & par les points N, A, ε, je fais paſſer un grand Cercle de la Sphere dont l'Arc εi coupe qc en i, & je remarque que les Zones $Q \varepsilon c q$, $Q \varepsilon i q$ ne different l'une de l'autre, que d'une quantité $\varepsilon c i$ infiniment petite par rapport à elles. D'où je conclus que la réſiſtance pour la Zone $Q \varepsilon i q$, ſera la même que pour la Zone $Q \varepsilon c q$. Le Problême ſe réduit donc à celui-ci.

PROBLÊME VI.

296. *Un Sphéroide étant mû dans un Fluide, ſuivant la direction de ſon Axe* AN, (Fig. 90.) *trouver la réſiſtance que ſouffre la Zone* R Q ε c q r *diviſée en deux parties égales par le plan* N Q A.

1°. Soient menées les lignes εP, QP, RP, perpendiculaires à l'Axe AN, & les lignes cp, qp, rp, qui leur ſoient parallèles, & cn perpendiculaire à εP; on aura $cn = Pp$; $\varepsilon c = Qq = Rr$.

2°. Maintenant du rayon Pn (Fig. 91.) ſoit décrit dans

le plan PRQ l'Arc nuz, concentrique à l'Arc $RQ\epsilon$, & ſoient imaginés les plans Ptd, Pme, infiniment proches l'un de l'autre. Cela poſé,

Soit ϵc ou em ou Qq ou $Rr = ds$; ϵn ou um ou it ou $DQ = dt$; cn ou eu ou id ou $Dq = dz$; & le petit Arc $tm = dr$: ſoit encore f la réſiſtance abſolue que feroit le Fluide, à une ſurface circulaire $\frac{ca}{2}$, qui frapperoit ce Fluide avec une vîteſſe donnée g. Si on ſuppoſe que u ſoit la vîteſſe du Sphéroide, & que la réſiſtance ſoit comme une fonction quelconque (φu) de la vîteſſe, on trouvera, que l'effort abſolu des particules du Fluide, contre le petit parallélogramme $it\,mu$, qu'elles frappent perpendiculairement eſt à l'effort f, comme $\varphi u . it\,mu$ à $\varphi g \times \frac{ca}{2}$. Donc cet effort abſolu eſt $\frac{f\varphi u . 2dr . dt}{\varphi g . ca}$ (à cauſe que $itmu = it \times tm = dr \times dt$.

3°. Mais l'effort qui réſulte de ce dernier, contre la petite ſurface $tdem$ (Fig. 92.) ſuivant mC perpendiculaire à em dans le plan Pme eſt $\frac{f\varphi u . 2dr . dt . mu}{\varphi g . ca . me} = \frac{f\varphi u . 2dt^2 dr}{\varphi g . cads}$.

4°. L'effort ſuivant MC ou CK dans le plan Pme, ſe décompoſe en deux autres, l'un ſuivant l'Axe CN, & cet effort eſt $\frac{f\varphi u . 2dt^3 dr}{\varphi g . cads^2}$; l'autre ſuivant CL, menée perpendiculairement à l'Axe dans le plan Pme, & qui eſt $\frac{f\varphi u . 2dt^2 dr dz}{\varphi g . cads^2}$.

5°. Enfin

5°. Enfin l'effort ſuivant CL (Fig. 93.) ſe décompoſe encore en deux autres ; l'un ſuivant CF perpendiculaire au plan PQq ; l'autre ſuivant Cb perpendiculaire à l'Axe PC dans ce même plan PQq, & ce dernier effort eſt $\frac{f\phi u.2dt^2\,dr\zeta z.Cb}{\phi g.cads^2.CL}$. Or en menant par le point ε la ligne εV perpendiculaire à la ligne PQ, & qui coupe la ligne Pm en k, on verra que les triangles PVk, CLb ſont ſemblables. Donc $\frac{Cb}{CL} = \frac{PV}{Pk}$. Cela ſuppoſé,

6°. On nommera les données PV, h; $V\varepsilon$, m; & l'indéterminée Vk, ζ; & l'on aura $k\lambda = d\zeta$; l'Arc $\lambda\beta = \frac{hd\zeta}{\sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$; par conſéquent l'Arc tm $(dr) = \frac{hd\zeta\sqrt{[hh+mm]}}{hh+\zeta\zeta}$: on a de plus $\frac{PV}{Pk} = \frac{h}{\sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$. Mettant ces valeurs dans l'expreſſion précédente $n.$ 5, on aura l'effort ſuivant $Cb = \frac{f\phi u.2dt^2\,d\zeta.hhd\zeta\sqrt{[hh+mm]}}{\phi g.cads^2.(hh+\zeta\zeta)^{\frac{3}{2}}}$.

7°. Je prends maintenant l'intégrale de cette derniere quantité, en regardant ſeulement ζ comme variable (car toutes les autres quantités ſont en effet conſtantes) & j'ai $\frac{f\phi u.2dt^2\,d\zeta.\zeta\sqrt{[hh+mm]}}{\phi g.cads^2.\sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$, pour l'expreſſion de l'effort total ſuivant Cb, réſultant de l'impreſſion du Fluide contre la Zone partielle $Qmeq$.

8°. Si donc on fait Vk $(\zeta) = V\varepsilon$ (m), on aura l'effort ſuivant Cb pour la Zone $Q\varepsilon cq$, égal à

$\frac{f\Phi u.2dt^2dz.m}{\Phi g.cads^2}$, & l'effort ſuivant Cb pour la Zone entiere $Rscr$, égal à $\frac{f\Phi u.2sV.2(DQ)^2.Dq}{\Phi g.ca.Qq^2}$.

REMARQUE.

297. 1°. L'effort ſuivant CF dont nous n'avons point fait mention, eſt détruit par un effort contraire & égal, provenant de la réſiſtance, faite à la Zone $RQqr$; de ſorte que tout l'effort du Fluide contre la Zone $Rscr$, ſe réduit à deux; l'un ſuivant l'Axe CN; l'autre ſuivant Cb perpendiculaire à ce même Axe, dans le plan PQq qui partage la Zone en deux également.

2°. Si on cherche les efforts provenans de la réſiſtance que fait le Fluide au reſte de la Zone $Rscr$, c'eſt-à-dire, à ſon complément à la Zone circulaire entiere, on réduira de même ces efforts à deux; l'un ſuivant CN dans la direction de l'Axe; l'autre ſuivant Cx directement oppoſée à Cb, & ce dernier effort doit être égal à l'effort ſuivant Cb, ſi la Zone circulaire entiere eſt dans un ſeul Fluide. Car il eſt viſible que dans ce cas, l'effort provenant de la réſiſtance faite à la Zone circulaire entiere, ſe réduit à un ſeul effort dans la direction de l'Axe CN; ce qui ne peut ſe faire, à moins que les efforts ſuivant Cb & Cx ne ſoient égaux. Donc &c.

PROBLÊME VII.

298. *Trouver la réſiſtance que ſouffre un ſegment de* Eam, (Fig. 94.) *frappé par un Fluide ſuivant une di-*

rection quelconque QK, qk, *& l'effort qui en réſulte contre le centre* C, *tant ſuivant* Cb *perpendiculaire à* CA, *qu'on ſuppoſe parallèle à* QK, *que ſuivant* CN *dans la direction même de la ligne* CA, *qu'on peut prendre, ſi l'on veut, pour l'Axe de la Sphere.*

I.

Nous commencerons par chercher l'effort ſuivant *Cb* (Fig. 89). Or nous avons trouvé (*art.* 296, *n.* 8.) que l'élément de cet effort eſt $\frac{f\phi u.2eV.2(DQ)^2.Dq}{\phi g.ca.Qq^2}$. Soit donc (Fig. 94.) *CA*, *a*, *CG*, *e*, *CO*, *m*, *CP*, *x*, l'expreſſion de cet effort, ſera $\frac{-4f\phi u.xxdx}{ca\phi g.aa}V[OM^2-OV^2]$, où j'ai mis $-dx$, parce que *CP* (*x*) croiſſant, cet effort diminue. Or les triangles ſemblables *CPL*, *CAG*, donnent $CL=\frac{ax}{e}$: donc $OL=\frac{ax}{e}-m$. De plus, $AG(V[aa-ee]):CG(e)::OL(\frac{ax}{e}-m):OV=\frac{ax-em}{V[aa-ee]}$. On aura donc l'expreſſion analytique de l'élément de l'effort ſuivant *Cb*, dont l'intégrale, en ſuppoſant $x-\frac{em}{a}=z$, ſe trouvera.....

$$\frac{4f\phi u.mmee}{caa\phi g.aaV[aa-ee]}\int -dzV[aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz]+$$

$$\frac{f\phi u}{caa\phi gV[aa-ee]}\times z.(aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz)^{\frac{1}{2}}+$$

$\frac{4f\phi u.2em}{caa\phi g\sqrt{[aa-ee].3a}} \times (aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz)^{\frac{3}{2}} +$
$\frac{f\phi u}{caa\phi g\sqrt{[aa-ee]}} \times (aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}) \times$
$\int -dz\sqrt{[aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz]}.$

Pour conſtruire maintenant cette intégrale, je remarque 1°. que $CR=\frac{em}{a}$: donc $x-\frac{em}{a}=CP-CR=RP$. De plus, $CA\ (a) : AG\ (\sqrt{[aa-ee]}) :: OM\ (\sqrt{[aa-mm]}) : RF=\sqrt{[aa-mm-ee+\frac{mmee}{aa}]}$.

Soit donc du diametre $FS=2RF$, (Fig. 95.) décrit le demi-Cercle FQS, l'intégrale ci-deſſus, en prenant RP, (Figure 95) = à RP (Figure 94), ſera

$(K)\ldots\ldots\ldots \frac{4f\phi u.CR^2}{caa\phi g.AG} \times$ ſegm. $PQF+\frac{4f\phi u.2CR}{caa\phi g.3AG} \times PQ^3+\frac{f\phi u}{caa\phi g}(\frac{RP\times PQ^3+RF^2\times PQF}{AG})$. Lorſque le point P tombe en F, cette intégrale devient zero; ainſi elle eſt complette, & il n'y a rien à y ajouter.

Donc l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance faite au ſegment entier EaM, eſt $\frac{4f\phi u.CR^2}{caa\phi g.AG} \times FQS+\frac{4f\phi u.FR^2}{caa\phi g.4AG} \times FQS$. Or le demi-Cercle FQS eſt au demi-Cercle $\frac{ca}{4} :: RF^2.aa$. donc $FQS=\frac{ca.RF^2}{4aa}$, & la quantité précédente ſe réduit à $\frac{f\phi u.RF^2.(RF^2+4CR^2)}{a^3\phi g.4AG}$, qui

exprime l'effort ſuivant Cb, réſultant de la réſiſtance faite au ſegment entier EaM.

II.

A l'égard de l'effort ſuivant CN (Fig. 89), il eſt clair (*art.* 296, *n.* 4.) que ſon élément eſt $\frac{f\Phi u \cdot 2DQ^3}{ca\Phi g \cdot Qq^2} \times 2 \cdot \text{arc.}\, Q\epsilon$. Cette quantité peut paroître d'abord difficile à exprimer analytiquement. Car l'expreſſion de l'Arc $Q\epsilon$ doit y entrer : or cet Arc n'eſt exprimable que par une quantité ſous le ſigne $\int$; & comme le rayon PQ & le Sinus $V\epsilon$ ſont variables l'un & l'autre, cette expreſſion ne pourroit manquer de rendre la différentielle fort compliquée.

Pour avoir donc une expreſſion dans laquelle il n'entre ſous le ſigne $\int$ qu'une ſeule variable, on prendra une indéterminée s, telle que $\frac{s}{a} = \frac{V\epsilon}{PQ}$, & l'Arc $Q\epsilon$ ſera égal à $\frac{PQ}{a} \times \int \frac{ads}{\sqrt{[aa - ss]}}$, ou, à cauſe que $\frac{s}{a}$ eſt égale à ..... $\frac{\sqrt{[a^4 - aamm - aaee - aaxx + 2aemx]}}{\sqrt{[(aa - ee).(aa - xx)]}}$ que je ſuppoſe pour abréger $= \frac{\Gamma x}{a}$, on aura l'Arc $Q\epsilon = \frac{\sqrt{[aa - xx]}}{a} \times \int \frac{ad(\Gamma x)}{\sqrt{[aa - (\Gamma x)^2]}}$. L'élément cherché ſera donc ..... $\frac{-4f\Phi u.x^3 dx}{ca\Phi g.a^3} \int \frac{ad(\Gamma x)}{\sqrt{[a^2 - (\Gamma x)^2]}}$, dont l'intégrale exprimera la réſiſtance totale ſuivant CN.

SCOLIE.

299. Lorſque le point E (Fig. 96 & 97.) eſt de l'autre côté du point B par rapport au point A, alors, comme il n'y a que la portion BaM du ſegment, qui ſouffre de la réſiſtance, on prendra FC (Fig. 97.) = à FC (Fig. 96.) & l'intégrale (K) (*article* 298.) exprimera la réſiſtance totale, en mettant $-RC$ pour RP, CL pour PQ & FLC pour PQF.

Si l'Arc BM eſt preſqu'un demi-Cercle, c'eſt-à-dire, ſi les points b, M (Fig. 98.) ſont infiniment près l'un de l'autre, la ligne CF eſt infiniment petite. Donc l'effort ſuivant Cb exprimé par l'intégrale (K) devient alors infiniment petit.

PROBLÊME VIII.

300. *Trouver la courbe que décrit le centre* C (Fig. 80.) *d'une Sphere ſans peſanteur, qui paſſe obliquement d'un Fluide moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant, en ſuppoſant la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe.*

La même conſtruction & les mêmes raiſonnemens étant faits que pour le cas du Cercle (*art.* 264.) on aura

$$\frac{[f-f].RF^2\times(RF^2+4CR^2)\times Ci^2}{a^3gg.4AG}=m.oi.$$

Si on met dans cette Equation, au lieu de RF, CR, AG, leurs valeurs $\frac{dy\sqrt{[2ax-xx]}}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, $\frac{adx-xdx}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, $\frac{ady}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, & $\frac{2pb}{m}$ au lieu de gg, on aura.....

$$(L)\ldots dy = hdx c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):2pba^4} :$$

$$\sqrt{[aa - \frac{hh}{4}\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]^2}{pba^4} \times}$$

$$c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4},$$

Equation de la premiere courbe décrite par le centre C.

Lorſque les points B, E, dont l'un monte & l'autre deſcend toujours, ſe ſont rencontrés, & que le point E a repaſſé au-delà du point B, l'Equation de la courbe eſt alors (en faiſant $\frac{adx-xdx+dy\sqrt{[2ax-xx]}}{dy\sqrt{[2ax-xx]}} = \frac{t}{a}$, mettant pour ſimplifier les calculs, u pour $a-x$, $z\,dx$ pour $a\,dy$, & aq pour $z\ (t-a)$

$$(M)\ldots\ldots \frac{-6pbc}{f-f} \times [(t-a).dq - q\,dt] = \frac{a^4 q^3\, dq}{(aa+qq)^{\frac{7}{2}}} \times$$

$$\left(\frac{[12.(t-a^2)+3a^2]\int dt\sqrt{[2at-tt]}}{t-a} + 5.[aa-(t-a^2)]^{\frac{3}{2}}\right).$$

Si on pouvoit ſéparer les indéterminées de cette Equation, on auroit, comme il eſt évident, la conſtruction de la courbe qu'on cherche.

COROLLAIRE I.

301. Il ne faut que relire les *articles* 265, 266, 267, 268, pour voir que les propoſitions démontrées dans ces articles pour la réfraction du Cercle, ſont auſſi vraies pour la réfraction de la Sphere. Il n'eſt pas moins évident que la courbe décrite par la Sphere, doit avoir le rayon de la développée infini à ſes deux extrémités,

comme on l'a démontré pour le Cercle dans l'*art.* 269, De même tout ce qu'on a dit dans les *art.* 271, 272, 273, 275, ſera également vrai pour la Sphere comme pour le Cercle, & ce ſeroit tomber dans des redites inutiles, que de vouloir démontrer de nouveau ces propoſitions.

Si on ſuppoſe, comme dans l'*art.* 276, que la différence de réſiſtance des deux milieux ſoit infiniment petite, & qu'on conſerve les mêmes noms, on trouvera $\frac{a.(2aq-qq)^{\frac{1}{2}}}{a^3.(a-q)} = \frac{[f-f]\times a}{15.pb}$. Donc *lorſque les deux milieux different peu l'un de l'autre en réſiſtance, & que la réſiſtance dans chacun eſt comme le quarré de la viteſſe, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante.*

COROL. II.

302. Si on ſuppoſe, comme dans l'*article* 277, que h ſoit très-petite, on trouvera encore par la même voie qu'on l'a trouvé pour le Cercle dans cet *article* 277, que le rapport du Sinus d'incidence au Sinus de réfraction eſt conſtant & égal à celui de 1 à $c^{n:a}$, en prenant c pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, & $n:a$ pour ce que devient la quantité ..... $\int(dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):2pba^4$ dans l'Equation (L), lorſque $x=a$.

Au reſte, on prouvera encore de même, que dans l'*article* 278, que *les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point en général en raiſon conſtante.* Car appellant $\frac{q}{a}$ ce

que

que devient la quantité ..... $\int \frac{dx\,[f-f].[2ax-xx]^2}{pba^4} c^{(\int dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4}$

dans l'Equation (L), on trouvera par les mêmes raiſonnemens que dans l'*article* 277, que le rapport des Sinus, lorſque h eſt infiniment petite, eſt $c^{n:a} + h^2 (\frac{c^{n:a}q}{8a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa})$, & l'on réduira la queſtion comme dans l'*article* 278, à prouver que q n'eſt pas égal à $4ac^{2n:a}$, ce qui ſe démontre en cette ſorte : q eſt ce que devient la quantité ..... $\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]^2}{pba^3} c^{\int(dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4}$, lorſque $x = a$; mais cette quantité eſt égale à $\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} c^{\int(dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4} - c^{\int dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4} + 1$. Si on prend donc $\frac{q}{a}$ pour ce que devient ..... $\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} c^{\int(dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4}$, lorſque $x = a$: on aura $q = q - ac^{2n:a} + a$. Il faut donc prouver que $q - ac^{2n:a} + a$ n'eſt pas égal à $4ac^{2n:a} - 4a$; ou, ce qui eſt la même choſe, que q n'eſt pas $= 5a$

$(c^{2n:a} - 1)$: or $\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} \times c^{\int(dx.[f-f].[a-x]^2[2ax-xx]):pba^4} =$

$$\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} \times$$

$$c^{[f-f].([a-x].[2ax-xx]^2+\int aadx.[2ax-xx]):5pba^4} >$$

$$\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} c^{[f-f]\int dx.[2ax-xx]:5pba}.$$

Mais cette derniere quantité eſt égale à.....

$5(c^{[f-f]\int dx.[2ax-xx]:5pba} - 1)$ & lorſque $x = a$, elle devient $5(c^{2n:a} - 1)$, donc $q > 5a(c^{2n:a} - 1)$. Donc &c.

COROL. III.

303. On prouvera encore, comme dans l'*art.* 279, que dans les deux cas des articles précédens, où nous venons de faire voir que les Sinus ſont en raiſon conſtante, les angles d'incidence & de réfraction ſont réciproques. Mais on fera voir auſſi, comme on l'a fait voir dans le même *art.* 279, qu'*en général, les angles d'incidence & de réfraction ne ſont point réciproques.* Cela doit être à préſent ſi facile, qu'il eſt inutile de nous y arrêter.

Il ſera encore aiſé de démontrer pour la Sphere, les mêmes propoſitions que nous avons démontrées pour le Cercle dans les *articles* 281, 282, 284, 285, &c. de ce Traité.

COROL. IV.

304. *Si la réſiſtance n'eſt point comme le quarré de la vîteſſe, & que les deux milieux different peu l'un de l'au-*

tre, les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point en raiſon conſtante.

On démontrera cette propoſition par une Méthode préciſément ſemblable à celle par laquelle on a démontré la propoſition analogue (*article* 286) : quoique j'en aye fait le calcul, je ne l'inférerai point ici, parce qu'il eſt fort long; & que d'ailleurs il eſt fort naturel de penſer que la propoſition dont il s'agit ici eſt très-vraie, après celle que nous avons démontrée dans l'*article* 286.

COROL. V.

305. *Les angles d'incidence & de réfraction ne ſont réciproques dans aucune hypothèſe de réſiſtance.*

Pour démontrer cette propoſition quand le mobile eſt une Sphere, & appliquer ici l'*article* 291, on obſervera d'abord qu'en appellant f la réſiſtance faite au grand Cercle, la force ſuivant AC (Figure 99.) réſultante de la réſiſtance faite à une portion aAM eſt $f \times (\frac{1}{2} - \frac{Cp^4}{2CA^4})$, & que la force réſultante de la réſiſtance faite à la portion $EaMQ$ eſt, à un infiniment petit du troiſiéme ordre près, $\frac{f.(Cp^4 - CP^4)}{2a^4}$; qu'enfin la force réſultante de la réſiſtance faite à la portion $EeQq$, eſt $\frac{f.CP^4}{2a^4}$.

Or comme Cp & CP ne different qu'infiniment peu l'un de l'autre, lorſque l'angle aCA eſt fort petit, comme on le ſuppoſe ici, la réſiſtance ſera (à un infiniment

petit du troiſiéme ordre près) $\frac{f}{2} + [f - f](\frac{1}{2} - \frac{CP^4}{2a^4}) =$

$\frac{f}{2} + [f - f](\frac{2ax - xx}{aa} - \frac{(2ax - xx)^2}{2a^4})$. Du reſte, le procédé de la démonſtration ſera préciſément le même que dans l'*article* 291 ; c'eſt pourquoi nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire de nous arrêter plus long-tems là-deſſus.

Remarque.

306. Si le Cercle ou la Sphere entrent d'un Fluide dans un autre ſuivant une ligne perpendiculaire à la ſurface commune des deux Fluides, alors, comme ils ne décrivent point la courbe, l'unique Problême qu'on puiſſe ſe propoſer, eſt de chercher quelle ſeroit leur vîteſſe dans un inſtant quelconque du tems de l'immerſion. Mais ce Problême eſt ſi aiſé à réſoudre, ſoit en ſuppoſant le Cercle & la Sphere ſans peſanteur, ſoit en les regardant comme peſans, & en ayant même égard à la peſanteur ſpécifique des Fluides, que nous ne croyons pas néceſſaire d'en donner ici la ſolution. Nous remarquerons ſeulement que le Problême ne ſeroit pas plus difficile, ſi au lieu de la Sphere ou du Cercle, on prenoit en général une figure quelconque compoſée de deux parties égales, ſemblables, & ſemblablement ſituées des deux côtés de leur Axe, laquelle s'enfonçât d'un Fluide dans un autre, perpendiculairement, & ſuivant la direction de ce même Axe.

SCOLIE GÉNÉRAL.

307. Au reſte, nous finirons par remarquer, que tout ce qui a été dit juſqu'ici, n'eſt vrai que dans la ſuppoſition que ce ſoit un Cercle ou une Sphere qui s'enfonce. Car bien loin qu'on ſoit fondé à dire en général, par exemple, *que la réfraction doit ſe faire en s'éloignant de la perpendiculaire, ſi le paſſage ſe fait d'un milieu dans un autre plus réſiſtant :* cette propoſition ſe trouveroit fauſſe dans pluſieurs cas. Tout dépend de la figure du Corps, & de la direction ſuivant laquelle il ſe préſente pour entrer dans le nouveau milieu. Soit, par exemple, un parallélogramme rectangle $ABDC$, (Fig. 100.) dont la diagonale AB ſoit parallèle à la ſurface EF des deux Fluides, & dont la direction GD paſſe par ſon angle D & par ſon centre G; je dis que ce parallélogramme, quoiqu'il entre obliquement ſuivant GD, ne doit ſouffrir aucune réfraction à ſon paſſage. Car dans l'inſtant que le parallélogramme touche en D la ſurface EF, l'action du Fluide ſur la ligne BD eſt à ſon action ſur la ligne AD, comme $BD \times \frac{DR^2}{DG^2}$ à $\frac{AD \times GR^2}{DG^2} :: DR : GR$; d'où il s'enſuit, que ces deux actions étant regardées comme réunies aux points de milieu S, R, leur action conjointe doit être dirigée ſuivant DG. Donc au moins dans le premier inſtant de l'immerſion, le parallélogramme ne ſera point écarté de ſa direction. Mais dans l'inſtant ſuivant qu'il eſt enfoncé de la partie MDL, il eſt clair par une raiſon ſemblable

à la précédente, que la force réſultante de l'action du ſecond Fluide, contre les lignes *MD*, *DL*, & la réſultante de l'action du premier Fluide contre les lignes *LB*, *MA*, doit être dirigée ſuivant la même ligne *DG*. Donc &c.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

308. Les loix de la réfraction des Corps ſolides de figure circulaire ou ſphérique, ſont donc, comme on l'a démontré dans ce Chapitre, entiérement différentes des loix de la réfraction de la lumiere que l'Expérience nous a appriſes. Or comme on ne ſauroit guères douter que les Corpuſcules lumineux ne ſoient de figure ſphérique, nous croyons pouvoir conclure, que de toutes les explications qu'on a données juſqu'à préſent de la réfraction de la lumiere, dans le ſyſtême de l'émiſſion des Corpuſcules, il n'y a de recevable que celle de M. *Newton*, qui fait dépendre la réfraction de la force attractive du milieu : encore cette explication n'aura-t-elle lieu qu'autant qu'on ne ſubſtituera pas à cette force attractive l'impulſion d'un Fluide inviſible. Car la démonſtration de M. *Newton*, qu'on peut lire, Sect. XII du premier Livre de ſes Principes, ſuppoſe formellement, que la vîteſſe du Corpuſcule ne ſoit altérée que dans le ſens perpendiculaire à la ſurface, & non dans le ſens parallèle. Or ſi la force qui agit perpendiculairement à la ſurface provenoit d'un Fluide, ce Fluide réſiſteroit auſſi dans le ſens parallèle, & la vîteſſe en ce ſens ne pourroit plus être cenſée

conſtante; ce qui dérangeroit entiérement la démonſtration de M. *Newton.*

Barrow, dans ſes *Leçons Optiques* Lec. 1, a donné d'après le P. *Maignan*, Minime, une explication de la réfraction de la lumiere aſſez ingénieuſe. Mais outre que cette explication ſuppoſe les rayons de lumiere de figure Priſmatique, ce qui me paroît difficile à croire, j'eſpere démontrer en quoi cet Auteur s'eſt trompé, lorſque je parlerai de la réfraction des Corps de figure quelconque.

SECTION III.

Remarques ſur le Mémoire de M. de Mairan, *qui a pour titre :* Recherches Phyſico-Mathématiques ſur la réflexion des Corps.

369. M. *de Mairan* a donné dans les *Mém. de l'Académie de* 1723, (*p.* 343 *juſqu'à* 386), un Mémoire ſur la réfraction, où il traite cette matiere par des Principes bien différens de ceux que je viens d'établir : auſſi ſuis-je obligé d'avouer qu'il n'y a preſqu'aucune propoſition eſſentielle ſur laquelle je ſois d'accord avec lui : j'ai donc cru devoir me juſtifier ici ſur la différence de nos Principes, en expoſant les difficultés dont la Théorie de M. *de Mairan* me paroît ſuſceptible.

1°. L'idée générale de M. *de Mairan*, comme il paroît par les premieres lignes de ſon Mémoire, a été d'expliquer la réfraction par les mêmes Principes que la réflexion des Corps pouſſés contre un plan mobile. Cette

idée, qui eſt très-ingénieuſe, eſt fort analogue à celle de *Deſcartes*, qui explique la réfraction d'une maniere à peu près ſemblable, ſi ce n'eſt qu'au lieu du plan mobile il ſuppoſe une toile tendue *. Mais, malgré une ſi grande autorité, il me ſemble qu'une pareille idée ne peut ſervir à expliquer la réfraction des Corps; parce que la réſiſtance du Fluide dans lequel le mobile entre, ne ſe fait pas dans le ſeul ſens de la perpendiculaire à la ſurface du Fluide, comme il arrive lorſqu'un Corps choque un plan mobile.

2°. Auſſi cette idée, ſi elle étoit ſuivie, conduiroit-elle à une Théorie de la réfraction fort différente de celle que M. *de Mairan* prétend établir. Car nommant m, la maſſe du Corps choquant; μ, celle du Corps choqué; u, la vîteſſe du Corps avant le choc; a, le Sinus total, & x, le Sinus d'incidence; on trouveroit par un calcul fort ſimple, que le Sinus de réfraction devroit être $\frac{(m+\mu)\cdot ux}{u\sqrt{[(m+\mu)^2\cdot xx+mm(aa-xx)]}}$; d'où l'on voit que les Sinus ne ſeroient point en raiſon conſtante, & que la vîteſſe plus ou moins grande du mobile ne changeroit rien à ſa réfraction : deux propoſitions fort contraires à celles que M. *de Mairan* a tâché d'établir.

3°. Auſſi M. *de Mairan* ſemble-t-il avoir reconnu lui-même l'inſuffiſance de ce Principe du plan mobile, puiſque dans l'*article* LIII de ce même Mémoire, *examinant*, dit-il, *cette matiere plus immédiatement*, & cher-

* Voyez la Dioptrique de *Deſcartes*.

chant

chant ce qui arrive à une Sphere qui paſſe d'un milieu dans un autre, il a égard non-ſeulement à la réſiſtance dans le ſens perpendiculaire à la ſurface, mais auſſi à la réſiſtance dans le ſens parallèle à cette même ſurface.

4°. Quoique cette nouvelle maniere d'expliquer la réfraction paroiſſe beaucoup plus naturelle & plus plauſible que la premiere, j'ai cependant des raiſons très-fortes de douter qu'elle puiſſe conduire à une Théorie ſûre & exacte. Pour le faire voir, j'obſerverai d'abord qu'une Sphere qui ſe meut dans un ſeul & même milieu, doit y décrire une ligne droite. Cependant ſi on décompoſoit ſa vîteſſe à chaque inſtant en deux autres dont les directions fuſſent de poſition donnée, on trouveroit que la Sphere ne pourroit décrire une ligne droite que dans un ſeul cas; ſavoir, dans celui où la diminution que recevroit à chaque inſtant l'une & l'autre de ces vîteſſes, ſeroit en même raiſon que la vîteſſe; ce qui ne peut arriver que dans une ſeule hypothèſe de réſiſtance. La Méthode de décompoſition eſt donc fautive pour le cas de l'enfoncement total: par conſéquent elle doit l'être néceſſairement pour le cas de l'enfoncement ſucceſſif.

5°. Mais pour démontrer plus directement la propoſition dont il s'agit, & faire voir que la Méthode de décompoſition n'eſt exacte en aucun cas, ſoit *CA* (Fig. 80.) la direction de la Sphere, ou (pour faciliter le calcul) du Cercle *DNA* dans un inſtant quelconque où l'enfoncement eſt *Oa*, & ſuppoſons (pour faciliter encore le calcul) que le Cercle paſſe du vuide dans un Fluide;

la vîteſſe ſuivant Ca ſera $\frac{u.CG}{CA}$, & la vîteſſe ſuivant OM ſera $\frac{u.GA}{CA}$; l'effort ſuivant CD réſultant de la réſiſtance dans le ſens perpendiculaire ſera (*art.* 259.) $2f\varphi(\frac{u.CG}{CA})\times \frac{3CA^2.OM-OM^3}{3CA^3.\varphi g}$; l'effort ſuivant CD réſultant de la réſiſtance dans le ſens MO, eſt $f\varphi(\frac{u.GA}{CA})\times\frac{OM^3}{3CA^3.\varphi g}$; & l'effort ſuivant Ch réſultant de cette même réſiſtance, eſt $f\varphi(\frac{u.GA}{CA})\times\frac{2CA^3-3CG.CA^2+CG^3}{3CA^3.\varphi g.}$. Donc l'effort ſuivant Cb devroit être, en ſuivant les Principes de M. *de Mairan*, $\frac{f}{\varphi g}\times[\varphi(\frac{u.CG}{CA})\frac{6OM.CA^2-2OM^3}{3CA^3}+\varphi(\frac{u.GA}{CA}).\frac{OM^3}{3CA^3}]\times\frac{GA}{CA}+\frac{f}{\varphi g}\times\varphi(\frac{u.GA}{CA})\times\frac{2CA^3-3CG.CA^2+CG^3}{3CA^3}\times\frac{CG}{CA}$. Ce qui eſt fort différent de l'expreſſion $\frac{f\varphi u.(CF^3-Ce^3)}{\varphi g.3CA^3}$ que nous avons trouvée ci-deſſus (*art.* 264.) pour l'effort ſuivant Cb, & que nous avons déduite, ce me ſemble, des Principes fort clairs.

Il ſeroit trop long d'examiner ici *à priori*, pourquoi la Méthode de décompoſition eſt fautive dans le cas de la réſiſtance des Fluides. Voyez la *Manœuvre des vaiſſeaux de M.* Bernoulli, Tom. II de ſes Œuvres, *p.* 129 *&* 153.

6°. En accordant même à M. *de Mairan* le Principe de décompoſition dont il ſe ſert, il me ſemble qu'il ne devroit pas en conclure, comme il le fait, que quand

une Sphere paſſe d'un milieu dans un autre plus réſiſtant, *la courbe qu'elle décrit doit être convexe vers la perpendiculaire Ca.* J'ai démontré à la vérité cette propoſition dans les *art.* 264 *&* 281 : auſſi je ne prétends pas en conteſter la vérité, mais ſeulement expoſer les difficultés qu'il me ſemble qu'on pourroit oppoſer à la preuve alléguée par M. *de Mairan.* Pour cela je me repréſente le mobile dans l'inſtant préciſément qu'il touche la ſurface du nouveau milieu, & décompoſant alors, ſuivant la Méthode de M. *de Mairan*, la vîteſſe du mobile en deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallèle à la réſiſtance du Fluide, je vois que ſi on appelle u la premiere & v la ſeconde de ces deux vîteſſes, les réſiſtances correſpondantes ſeront alors comme u^n à v^n, en ſuppoſant la réſiſtance comme une puiſſance quelconque de la vîteſſe; donc ſi $u : v > u^n : v^n$ (c'eſt-à-dire, ſi $u > v$ & $n < 1$, ou ſi $u < v$ & $n > 1$) la vîteſſe parallèle ſera plus retardée que la vîteſſe perpendiculaire. Mais lorſque le Cercle eſt enfoncé d'une quantité infiniment petite, le rapport des réſiſtances demeure le même (à un infiniment petit près) que quand le Cercle touche le nouveau milieu : il réſulte donc des Principes de M. *de Mairan*, que ſi $u > v$ & $n < 1$, ou ſi $u < v$ & $n > 1$, la courbe doit être concave vers la perpendiculaire, au moins dans ſon origine.

7°. Selon M. *de Mairan*, la mobile ne doit ceſſer de décrire la courbe que quand il eſt enfoncé tout-à-fait : de plus cette courbe, ſelon lui, va toujours en diminuant de courbure : ces deux propoſitions ſont encore contraires

l'une & l'autre à ce que j'ai avancé ci-deſſus, (*art.* 268 & 269), & que je crois avoir prouvé d'une maniere aſſez ſimple.

8°. Comme le but principal de M. *de Mairan* a été d'expliquer la réfraction de la lumiere par les mêmes Principes que la réfraction des Corps ſolides, il a cherché à démontrer que dans ce dernier cas les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante. J'ai tâché de faire voir dans les *art* 278 & 287, qu'il n'y a aucune hypothèſe ſur la réſiſtance où le rapport des Sinus ſoit conſtant, & je ne vois pas ce qu'on peut oppoſer à mes démonſtrations : il me paroît, au contraire, que la preuve de M. *de Mairan* eſt ſuſceptible de beaucoup de difficultés. Il cite d'abord un endroit de ſon Mémoire, où il prétend avoir prouvé que les forces avant & après l'immerſion, ſont réciproquement comme les Sinus. Cette propoſition eſt vraie dans le cas du plan mobile ; mais peut-elle s'appliquer à la réfraction, après ce que nous avons dit dans le *n.* 1 & 2 de ces Remarques? De plus, en accordant même que les forces ſont comme les Sinus, comment prouvera-t-on que les Sinus ſont en raiſon conſtante? M. *de Mairan* prétend que les forces ſont en raiſon inverſe des réſiſtances, & que les réſiſtances ſont en raiſon conſtante : il me ſemble qu'aucune de ces deux propoſitions ne préſente rien de net à l'eſprit.

En premier lieu, ſi par le mot de *réſiſtance*, M. *de Mairan* entend *l'intenſité de la réſiſtance* des deux Fluïdes, il eſt bien vrai que les réſiſtances ſeront en raiſon

conſtante : mais qui nous aſſure alors que les forces ſont entr'elles en raiſon inverſe des réſiſtances? Tout ce qu'on peut prétendre en ce cas, c'eſt que la vîteſſe après la réfraction ſera d'autant moindre par rapport à la vîteſſe après la réfraction, que la réſiſtance du nouveau milieu ſera plus grande par rapport à celle du premier. Mais ces vîteſſes ſeront-elles pour cela en raiſon inverſe des réſiſtances? D'ailleurs, ſi cette propoſition étoit vraie, il s'enſuivroit que (dans les Principes de M. *de Mairan*) toutes choſes d'ailleurs égales, une vîteſſe plus ou moins grande avant la réfraction n'apporteroit dans la réfraction aucun changement. Ce que M. *de Mairan* eſt bien éloigné de penſer.

En ſecond lieu, ſi par le mot de *réſiſtance*, M. *de Mairan* entend autre choſe que l'*intenſité de la réſiſtance*, je crois qu'en ce cas il eſt très-difficile de prouver, & que les forces ſont entr'elles en raiſon inverſe des réſiſtances, & que les réſiſtances ſont en raiſon conſtante.

9°. M. *de Mairan* prétend qu'en général, un Corps de figure quelconque doit s'écarter de la perpendiculaire, quand il paſſe dans un milieu plus réſiſtant que celui d'où il vient, & au contraire. J'ai démontré à la vérité dans l'*article* 264, que cette propoſition eſt vraie ſi le mobile eſt un Cercle ou une Sphere; mais je crois avoir prouvé auſſi dans l'*art.* 307, & le prouverai encore dans la ſuite, que cette propoſition n'eſt point vraie en général, & que tout dépend ici de la figure du Corps & de ſa direction.

10°. Je crois que ces difficultés, jointes à celles que M. *Clairaut* a déja propoſées contre la Théorie de M. *de Mairan* dans les *Mém. de l'Académie de* 1739, pourront faire naître aux Lecteurs quelques doutes ſur les Principes du Mémoire de 1723. Mais je ne finirai point ces Remarques, ſans dire auſſi un mot de quelques articles d'un Mémoire de M. *de Mairan*, imprimé en 1738. Il prétend *art.* LXXIV, *que la différente maſſe ou groſſeur des Globules de la lumiere, indépendamment de toute autre circonſtance, ne ſauroit produire les différens degrés de réfrangibilité que nous remarquons dans les parties qui compoſent un de ſes rayons ſenſibles.* Je ne crois pas cependant, que M. *de Mairan* puiſſe avancer cette propoſition dans ſes Principes. Car, ſelon lui, les loix de la réfraction de la lumiere doivent être les mêmes que celles de la réfraction des Corps ſolides : or il eſt aiſé de conclure de nos formules de l'*art.* 265, que la différence dans les maſſes, toutes choſes d'ailleurs égales, doit changer la réfraction.

Dans l'*art.* LXXXVII de ce même Mémoire, M. *de Mairan* attribue la différente réfrangibilité à la différence des vîteſſes, & prétend que la réfraction eſt d'autant moindre que la vîteſſe eſt plus grande, toutes choſes égales d'ailleurs ; je renvoye ſur cela le Lecteur aux *articles* 265 & 285 de cet Ouvrage, dans leſquels j'ai fait voir, ſi je ne me trompe, qu'il y a des cas où la vîteſſe plus ou moins grande ne change rien à la réfraction, qu'il y en a d'autres où la réfraction eſt d'autant plus grande que la vîteſſe initiale eſt plus grande, & au contraire.

CHAPITRE III.

Du mouvement des Corps dans des milieux d'une denſité uniforme ou variable.

310. J'AI démontré dans le Chapitre précéd. (*art* 307.) que ſi un parallélogramme rectangle entroit obliquement d'un Fluide dans un autre, ſuivant la direction d'une de ſes diagonales, & de maniere que l'autre diagonale fût parallèle à la ſurface commune des deux Fluides, ce parallélogramme ne ſouffriroit aucune réfraction dans ſon paſſage. Ce Théorême peut ſe déduire aiſément d'une propoſition du *Traité de la Manœuvre des vaiſſeaux* de M. *Bernoulli*, dans laquelle cet illuſtre Géometre prouve qu'un Navire qui auroit la figure d'un rectangle, étant mû dans un Fluide ſuivant une de ſes diagonales, l'impulſion du vent, néceſſaire pour contrebalancer la réſiſtance du Fluide, devroit avoir cette même diagonale pour direction. Le même Auteur fait voir encore, & c'eſt une propoſition aiſée à démontrer, que ſi ce Navire étoit mû ſuivant toute autre ligne que ſa diagonale, ou une parallèle à l'un de ſes côtés, l'action du vent devroit avoir une direction différente de celle du Navire. Il me fut aiſé de conclure après avoir lû ce Théorême, qu'un rectangle, mû librement dans un Fluide en repos, y décriroit une ligne courbe. Je remarquai enſuite que la plûpart des Auteurs qui ont traité du mouvement

des Corps dans des milieux réſiſtans, n'ont jamais regardé les Corps mûs que comme des points : d'où il réſulte que la Théorie de ces Auteurs ne peut guères s'appliquer en général qu'aux Corps ſphériques, & qu'elle eſt par conſéquent fort limitée. A l'égard des recherches qu'on a faites juſqu'à préſent ſur le mouvement des Corps dans des milieux d'une denſité variable, non-ſeulement on a toujours conſidéré le mobile comme un point, mais il a été néceſſaire de le conſidérer comme tel. Auſſi M. *Newton* a-t-il ſoin d'avertir *, que dans tout ce qu'il a donné ſur ce ſujet, il a ſuppoſé que le mobile étoit aſſez petit pour pouvoir être regardé à chaque inſtant, comme étant dans un milieu de denſité uniforme.

Il eſt vrai que ſi dans les Problêmes qu'on peut ſe propoſer ſur ce ſujet, on veut avoir égard à la figure du Corps mû, on s'apperçoit ſans peine que cette recherche ſuppoſe non-ſeulement des Principes peu connus, mais qu'elle demande encore des calculs longs & pénibles. J'ai donc cru qu'on ſeroit bien aiſe de voir ici ces différentes matieres traitées plus à fond, qu'elles ne l'ont été juſqu'à préſent. Je déterminerai d'abord la courbe que doit décrire un parallélogramme rectangle, mu ſuivant une direction quelconque dans un Fluide en repos, & je déduirai de la ſolution de ce Problême quelques Corollaires aſſez curieux. Je chercherai enſuite la courbe que doit décrire un Corps de figure circulaire ou ſphérique, lorſqu'il ſe meut dans un milieu de denſité variable.

* Scol. Prop. 16, liv. II. Princ. Math.

J'examinerai

J'examinerai après cela ce qui doit arriver à un Corps mû dans un Fluide qu'on ſuppoſe auſſi être lui-même en mouvement. Cette conſidération ajoute aux Problêmes de nouvelles difficultés, & donne lieu à quelques obſervations aſſez importantes. Enfin, je donnerai les loix du mouvement d'un Corps de figure quelconque dans un Fluide, & je terminerai ce Chapitre par des obſervations ſur quelques Problêmes, qui me paroiſſent n'avoir pas été bien réſolus juſqu'ici.

§. I.

Du mouvement d'un parallélogramme dans un Fluide en repos de denſité uniforme.

PROBLÊME I.

311. *Trouver la courbe que décrit un parallélogramme rectangle, ſans peſanteur, pouſſé ſuivant une direction quelconque dans un Fluide en repos.*

Soit $BFGH$ (Fig. 101.) le parallélogramme propoſé, C le point d'interſection de ſes deux diagonales, que nous appellerons ſon *centre*, CE la direction du centre dans un inſtant quelconque; ſoient menées les lignes FO, BO, HO, parallèles à CE, & du centre C ſoient abaiſſées les perpendiculaires CA, CD, aux côtés HB, BF; que f repréſente la réſiſtance que feroit le Fluide à une ligne donnée comme BD, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une vîteſſe donnée g; que u ſoit la vîteſſe du centre C ſuivant CE; qu'enfin φu, φg, expriment les

fonctions des vîteſſes u & g, ſuivant leſquelles on ſuppoſe que la réſiſtance ſe fait.

L'impreſſion du Fluide ſur le côté FB, conſidérée comme réunie au point D, & agiſſant ſuivant DC, ſera $\frac{f\varphi u.2AE^2}{\varphi g.CE^2}$. De même la réſiſtance du Fluide au côté HB, conſidérée comme réunie au point A, & agiſſant ſuivant AC, ſera $\frac{f\varphi u.HB.AC}{\varphi g.CE^2}$.

L'action du Fluide ſuivant DC ou CM ſe décompoſe en deux autres; l'une ſuivant CN, directement oppoſée à CE, & cet effort s'exprime par $\frac{f\varphi u.2AE^3}{\varphi g.CE}$; l'autre effort qui agit ſuivant CT perpendiculaire à CE, s'exprime par $\frac{f\varphi u.2AE^2.CA}{\varphi g.CE^3}$.

De même l'action du Fluide ſuivant AC ou CS ſe décompoſe en deux autres; l'une ſuivant CP, & qui eſt $\frac{f\varphi u.HB.AC^2}{\varphi g.CE^3}$; l'autre ſuivant CR, & qui s'exprime par $\frac{f\varphi u.HB.AC.AE}{\varphi g.CE^3}$.

Donc la réſiſtance du Fluide ſuivant EC, laquelle réſiſtance eſt égale à la ſomme des efforts ſuivant CN & CP, ſera $\frac{f\varphi u.(HB.AC^2+2AE^3)}{\varphi g.CE^3}$.

De même la force réſultante de l'impreſſion du Fluide, & qui tend à pouſſer le centre C perpendiculairement

à CE, laquelle force eſt égale à la différence des efforts ſuivant CT & CR, ſera $\frac{f\phi u.(2AE^2.CA-HB.AC.AE)}{\phi g.CE^2}$.

D'où il s'enſuit 1°. que ſi $HB=AE$ le centre C ne doit point décrire de courbe. 2°. Que ſi $2AE>HB$, comme on l'a ſuppoſé dans la Figure, la force ſuivant CT l'emportera ſur la force ſuivant CR, & que la courbe décrite par le centre C tournera ſa concavité vers la perpendiculaire CA. 3°. Enfin, que ſi $2AE>HB$, la force ſuivant CR ſera plus grande que la force ſuivant CT, & la courbe décrite par le point C ſera pour lors convexe du côté de CA.

Pour déterminer la nature de cette courbe, on nommera les lignes infiniment petites CV, dx, Vu, dy; d'où en ſuppoſant dx conſtante, on aura $ui=-ddy$ (à cauſe que la courbe eſt ici concave vers CA) & le petit Arc io décrit du centre C ſera $\frac{-dx\,ddy}{V[dx^2+dy^2]}$. On nommera de plus les données CA, a, AB, b, & l'indéterminée AE, z, d'où l'on tirera $dy=\frac{z\,dx}{a}$, $-ddy=\frac{-dx\,dz}{a}$, $oi=\frac{-dx\,dz}{V[aa+zz]}$. Si l'on ſuppoſe maintenant que m exprime la maſſe du parallélogramme $BFGH$, on aura ces deux Equations.....

$$\frac{f\phi u.(HB.AC^2+2AE^3)}{\phi g.CE^3}\times Ci=-mudu,$$

$$\&\ \frac{f\phi u.(2AE^2.CA-HB.CA.AE)}{\phi g.CE^3}\times\frac{Ci^2}{uu}=m.oi,$$

c'eſt-à-dire, $\frac{f\phi u.(2baa+2z^3).dx}{\phi g.a.(aa+zz)} = -mudu$;.....(1)

& $\frac{f\phi u\ (2zz-2bz).dx}{\phi g.auu} = -mdz$.....(2).

Si l'on tire de chacune de ces deux Equations une valeur de $\frac{f\phi u.dx}{\phi g}$, on aura en égalant ces deux valeurs, une Equation qu'on pourra mettre ſous la forme ſuivante: $\frac{du}{u} = \frac{zdz}{aa-zz} - \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z-b}$: équation dont chaque membre eſt une différentielle Logarithmique. Suppoſant donc que la vîteſſe donnée g repréſente la vîteſſe initiale, & qu'à l'origine de la courbe z ſoit égale à h, on aura $u = \frac{g\sqrt{[aa+zz].h.(z-b)}}{\sqrt{[aa+hh].z.(h-b)}}$.

On voit par-là que *la vîteſſe* u *eſt toujours exprimable en termes finis, quelle que ſoit la Loi de la réſiſtance.*

Si on remet enſuite cette valeur de u dans l'Equation (2), on aura la valeur de dx en z & dz, & par conſéquent auſſi celle de dy ou ($\frac{zdx}{a}$ en z & dz. Donc *la courbe pourra toujours être conſtruite au moins par les quadratures, quelle que ſoit la fonction* ϕu *de la vîteſſe, ſuivant laquelle la réſiſtance ſe faſſe,*

COROLLAIRE I.

312. L'Equation $u = \frac{g\sqrt{[aa+zz].(z-b).h}}{\sqrt{[aa+hh].(h-b).z}}$ fait voir

que u décroit continuellement jusqu'à ce que z devienne égal à b, & que quand $z = b$ la vîteſſe $u = 0$. D'où il s'enſuit que le *mouvement ne ceſſe que quand le centre* C *du parallelogramme a pour direction la diagonale même.* De plus, ſi on ſuppoſe que la réſiſtance ſoit comme une puiſſance n de la vîteſſe, on aura $\varphi u = u^n$, $\varphi g = g^n$, & l'Equation $\frac{f dx}{\varphi g} = \frac{-maudz}{\varphi u\,(2zz - 2bz)}$ ſe changera en $\frac{2f dx}{magg} = -dz\,(\frac{\sqrt{[aa+zz]}.h}{\sqrt{[aa+hh]}.(h-b)})^{2-n} . \frac{(z-b)^{1-n}}{z^{3-n}}$. Or comme la variable z a pour limites les quantités h & b, il eſt viſible par cette derniere Equation, que ſi $n =$ ou > 2, x eſt finie lorſque $z = b$.

Donc *la courbe aura un cours infini, ſi la réſiſtance eſt, ou comme le quarré, ou comme une puiſſance plus grande que le quarré de la vîteſſe ; ſi la puiſſance eſt moindre que le quarré de la vîteſſe, la courbe n'aura qu'un cours fini.*

L'élément du tems eſt $\frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{au} = \frac{-mgdz}{2f} \times (\frac{h}{\sqrt{[aa+hh]}.(h-b)})^{1-n} . \frac{(\sqrt{[aa+zz]})^{2-n}}{z^{2-n}(z-b)^n}$. D'où l'on voit que *le tems eſt infini, ſi* $n =$ *ou* > 1; *& fini, ſi* $n < 1$.

Donc *ſi* $n =$ *ou* > 2, *le cours de la courbe eſt infini, auſſi-bien que le tems employé à la décrire ; ſi* $n < 2$ *mais* $>$ *ou* $= 1$, *le cours de la courbe eſt fini, & le tems employé à la parcourir eſt infini ; enfin ſi* $n < 1$, *le cours de la courbe eſt fini auſſi-bien que le tems employé à la parcourir.*

COROL. II.

313. Si la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, on peut en ce cas conſtruire la courbe, ſans avoir beſoin de connoître la vîteſſe à chaque point. Car l'Equation (2) deviendra alors $\frac{f\,dx}{gg} = \frac{-m\,ad\zeta}{2\zeta\zeta - 2b\zeta}$: la quantité g peut repréſenter dans cette derniere Equation, ou la vîteſſe initiale, ou telle autre vîteſſe donnée qu'on voudra : ſi l'on regarde de plus cette vîteſſe g comme égale à celle que la maſſe m pourroit acquérir en parcourant un eſpace donné e, & étant continuellement pouſſé par une force conſtante p, qu'on peut, ſi on veut, ſuppoſer égale à la force f, on aura $gg = \frac{2pe}{m} = \frac{2fe}{m}$. Donc $dx = \frac{-e\,ad\zeta}{\zeta\zeta - b\zeta}$ & $dy = \frac{-e\,d\zeta}{\zeta - b}$, ce qui donne la conſtruction ſuivante.

Soit fait $OA = a$, $AB = b$, $AE = h$, (Fig. 102.) & ſoit décrite ſur l'aſymptote BF la Logarithmique VEG dont la ſoutangente ſoit $\frac{ea}{b}$. Ayant pris ſur la ligne BE un point quelconque P, on fera les lignes Ee & Pp égales à AB; on tirera enſuite les lignes PG, pu, eV, & HGK, ul, VL : ayant enfin pris $HI = Ll$, & mené Ik parallèle & égale à HK, je dis que le point k ſera à la courbe cherchée.

Car nommant AP, ζ, on aura auſſi $Bp = \zeta$, puiſque

(*conſtruct.*) $Bp = AP$. Par la même raiſon $Be = AE = h$. Donc PG ou $AH = \frac{e\,a}{b} \log. \frac{h-b}{z-b}$; Ll ou $HI = \frac{e\,a}{b} \log. \frac{h}{z}$; HK ou $Ik = AH \times \frac{b}{a} = e \log. \frac{h-b}{z-b}$; donc $AI = x$, $Ik = y$. Donc &c.

Lorſque le point P tombe en B, x devient infinie, & prenant $BN = AB$, la ligne Ll ou ſon égale Kk devient Lm. D'où l'on voit que ſi on fait $AQ = Lm$, & que par le point Q on tire QR parallèle à AD, cette ligne QR ſera aſymptote de la courbe Ak.

Quelle que ſoit la vîteſſe initiale, pourvû que $\frac{a}{h}$ demeure conſtante, la courbe Ak ſera la même. D'où il s'enſuit que la courbe AkM étant une fois tracée, il ſera aiſé de trouver la courbe décrite par le parallèlogramme, quelle que ſoit la vîteſſe initiale, & quelque valeur qu'on donne à h. Car ayant trouvé ſur la courbe AkM le point k, ou le rapport de dx à dy ſoit égal au rapport donné $\frac{a}{h}$, il eſt clair que kM ſera la courbe cherchée.

Corol. III.

314. Dans le cas où $n > 2$ & où, comme on l'a vu ci-deſſus (*article* 312.) le cours de la courbe eſt infini, il eſt aiſé de prouver qu'elle n'a point d'aſymptote comme dans le cas de $n = 2$. Pour cela il faut ſe rappeller qu'en

général, lorsque $x = \infty$ on a $z = b$, & qu'ainsi lorsque $x = \infty$, le rapport de dy à dx est celui de b à a. Or cela posé, il est évident que la courbe aura une asymptote, si, lorsque $x = \infty$, $y - \frac{bx}{a}$ n'est qu'une quantité finie, & au contraire qu'elle n'en aura point, si $y - \frac{bx}{a}$ est une quantité infiniment grande. Pour voir clairement dans quels cas $y - \frac{bx}{a}$ est une quantité finie ou infinie, représentons-nous la courbe EM (Fig. 103.) dont les coordonnées soient $AO = z$, $OM = x$, & dont l'Equation soit $\frac{2fdx}{magg} = -dz\left(\frac{V[aa+zz].h}{V[aa+hh].(h-b)}\right)^{2-n}.\frac{(z-b)^{1-n}}{z^{3-n}}$ qui est celle que nous avons trouvée ci-dessus (*art.* 312.) entre les x & les z. Comme l'on a déja vû que x croissant, z diminue, que $x = 0$ rend $z = h$, & que $x = \infty$ rend $z = b$, il est clair qu'en faisant $AE = h$, & $AB = b$, la courbe passera par le point E, & aura BQ pour asymptote. Or la valeur de dy qui est $\frac{zdx}{a}$ donne $y = \frac{ANME}{a} = \frac{ABNP+BPME}{a} = \frac{bx}{a} + \frac{BPME}{a}$. Il nous reste donc à voir, si lorsque $x = \infty$, l'espace $BPME$ est fini ou infini.

L'élément de cet espace est $dx.(z-b) = \frac{-maggdz}{2fz^{3-n}} \times \left(\frac{V[aa+zz].h.(z-b)}{V[aa+hh].(h-b)}\right)^{2-n}$. Il est aisé de voir que l'intégrale de ce second membre lorsque $z = b$, est une quantité

tité finie si $n = 2$, & infinie si $n > 2$. Donc *la courbe n'a une asymptote que dans le cas de* $n = 2$.

Corol. IV.

315. Si dans les Equations précédentes (*articles* 311 & 313), on suppose $b = 0$, c'est-à-dire, que la largeur HB (Fig. 101.) du rectangle soit infiniment petite ou nulle, il faudra effacer dans ces Equations tous les termes où se trouvera la quantité b.

Dans l'hypothèse particuliere de la résistance comme le quarré de la vîtesse, on aura $dx = \frac{-ead\zeta}{\zeta\zeta}$, dont l'intégrale est $x = \frac{ea}{z} - \frac{ea}{h}$; donc $x + \frac{ea}{h} = \frac{edx}{dy}$, ce qui fait voir que *la courbe cherchée est une Logarithmique* dont la soutangente $= e$, & que l'origine de la courbe est distante de son asymptote d'une quantité égale à $\frac{ea}{h}$.

Corol. V.

316. Il est aisé de voir que tous les points de la ligne FB décrivent des Logarithmiques semblables & égales à la Logarithmique décrite par le point D, milieu de cette ligne. D'où il s'ensuit, que quelque grandeur qu'ait la ligne FB, elle décrira la même portion de la même Logarithmique, pourvû qu'on ne change point le rapport $\frac{a}{h}$ qui est celui de dx & dy à l'origine. Or

de-là on peut conclure, qu'*une figure plane quelconque* FBN (Fig. 104.) *ſans peſanteur, étant mûe ſuivant une ligne* DA, *oblique au plan de cette ſurface, & dans un milieu réſiſtant comme le quarré de la vîteſſe, cette ſurface plane* FBN *décrira une Logarithmique.* Car ayant imaginé le plan *ADFB* perpendiculaire à *FNB*, & tiré tant de lignes qu'on voudra, parallèles à *FB;* il eſt clair par ce qu'on vient de dire, que tous les points de chacune de ces lignes décriront des Logarithmiques égales & ſemblables. Donc &c.

PROBLÊME II.

317. *Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême I, avec cette condition de plus, que le parallelogramme ſoit peſant, & que ſa baſe* HB (Fig. 102.) *ſoit ſituée horizontalement, on demande la courbe qu'il doit décrire.*

Soit p l'effort abſolu de la peſanteur, repréſenté par CL, & décompoſé en deux autres efforts; l'un ſuivant CK perpendiculaire à CE, lequel eſt égal à $p \times \frac{CK}{CL} = \frac{p \times AE}{CE}$; l'autre ſuivant KL parallèle à CE, lequel s'exprime par $p \times \frac{KL}{CL} = \frac{p \times CA}{CE}$. Combinant chacun de ces deux efforts avec les deux qui réſultent de la réſiſtance du Fluide, on aura .....

$$pdx = \frac{f\phi u}{qg} \cdot \frac{(2baa + 2z^3).dx}{a.(aa + zz)} = mudu,$$

& $\frac{p\zeta.(aa+\zeta\zeta).dx}{aauu}+\frac{f\varphi u}{\varphi g}\times\frac{(2\zeta\zeta-2b\zeta).dx}{a.uu}=-mdz.$

Chaſſant de ces deux Equations l'indéterminée u, on aura celle de la courbe cherchée, en mettant pour ζ ſa valeur $\frac{ady}{dx}$.

COROLLAIRE.

318. On voit aiſément que la conſtruction eſt très-facile dans le cas où $\varphi u=\varphi g$, c'eſt-à-dire, lorſqu'on ſuppoſe la réſiſtance conſtante. Car tirant alors de chacune des deux Equations une valeur de dx, & comparant enſemble ces deux valeurs, on aura une Equation dans laquelle les variables u & ζ ſeront d'elles-mêmes toutes ſéparées, & de laquelle on tirera la valeur de u en ζ. Mettant enſuite cette valeur de u dans l'une ou l'autre des deux premieres Equations, on aura la valeur de dx en ζ, $d\zeta$, & en conſtantes. Si l'on ſuppoſe $\varphi u=u^n$, & $\varphi g=g^n$, la comparaiſon des deux valeurs de dx, conduit à une Equation qu'on peut mettre ſous cette forme

$$[\frac{p}{2}-\frac{fabu^n}{g^n(aa+\zeta\zeta)}].(\frac{du}{u}+\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{\zeta d\zeta}{aa+\zeta\zeta})+\frac{fa\zeta u^n}{g^n(aa+\zeta\zeta)}\times[\frac{du}{u}-\frac{\zeta d\zeta}{aa+\zeta\zeta}]=0.$$

En faiſant $\frac{u\zeta}{\sqrt{[aa+\zeta\zeta]}}=s$, on trouve $p\zeta^n.(aa+\zeta\zeta)^{\frac{2-n}{2}}.(\frac{ds}{s})=\frac{2fa}{g^n}(bds.s^{n-1}-\zeta ds\times s^{n-2}+s^n d\zeta)$ ou multipliant par s^{-n-1}, & réduiſant,

$$\frac{-ds}{ss}=\frac{2fad(\zeta s^{-1})}{g^n p\zeta^n s^{-n}(aa+\zeta\zeta)^{\frac{2-n}{2}}-2fab}.$$

Lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, on a pour lors $n = 2$, & l'Equation précédente ſe réduit à $\frac{-ds}{ss} = \frac{2fad(zs-1)}{g^n p z^2 s^{-2} - 2fab}$, dont les deux membres ſont chacun une différentielle exacte.

On peut donc conſtruire la courbe lorſque n = 0, *& lorſque* n = 2.

REMARQUE I.

319. En général, la ſituation du parallélogramme *BFGH* (Fig. 105.) étant donnée, il eſt facile de trouver quelle doit être ſa direction *CE* pour que l'effort contre le centre *C*, réſultant de la réſiſtance du Fluide, ſoit dirigé ſuivant la verticale *CL*. Si de plus, la vîteſſe imprimée au centre *C* eſt telle que l'effort ſuivant *CL* ſoit égal à l'action de la peſanteur ſuivant *CK*, il eſt viſible que le point *C*, & le parallélogramme par conſéquent ſeront mûs uniformément en ligne droite ſuivant *CE*.

REMARQUE II.

320. Si une ſurface plane ſuppoſé peſante eſt mûe dans un Fluide ſuivant une ligne oblique au plan de cette ſurface, il ne ſera pas difficile, en ſuivant les Principes établis ci-deſſus, de trouver l'Equation de la courbe que cette ſurface doit décrire. On remarquera, au reſte, que dans pluſieurs cas cette courbe doit être à double courbure. Soit, par exemple, la ſurface plane *BFN* (Fig. 104.) ſituée verticalement, & mûe ſuivant la ligne

DA oblique au plan de cette ſurface, de façon que ſi on fait paſſer par DA un plan FDA perpendiculaire à cette ſurface, ce plan FDA ne ſoit point vertical; il eſt clair que le point D eſt en même tems pouſſé par trois forces, ſçavoir 1°. par ſa propre tendance ſuivant DA; 2°. par la réſiſtance du Fluide qui agit dans le plan FDA perpendiculairement à FBN. 3°. Enfin, par l'action de la peſanteur ſuivant la verticale DO. Or ces trois forces changeant continuellement de rapport, & les lignes DA, DO &c. ſuivant leſquelles ces forces agiſſent, étant dans des plans différens, il s'enſuit &c.

Pour trouver l'Equation de la courbe, ſoit imaginé un plan vertical PQp (Fig. 106.) parallèle à la ſurface FBN, & ſoit tirée dans ce plan la ligne horizontale $Pp\pi$. Que Mm repréſente un des petits côtés de la courbe que nous cherchons: ayant prolongé Mm en n, de ſorte que $mn = Mm$, on abaiſſera des points M, m, n, les perpendiculaires MQ, mq, nT au plan PQp, & de ces points Q, q, T, les perpendiculaires QP, qp, $T\pi$ à la ligne Pp; il eſt clair qu'on aura $Qq = qT$, & $Pp = p\pi$. Soit MS parallèle à Qq & ms parallèle à qT. La réſiſtance du Fluide agiſſant ſuivant mq perpendiculaire à ms, fait parcourir au point m la ligne ni; & la peſanteur qui agit dans le ſens vertical lui fait parcourir la petite ligne $i\mu$, de ſorte qu'il décrit le côté $m\mu$. Cela poſé.

Soit Pp ou $p\pi$, dx; Rq ou rT, dy, Sm ou sn, ds; on aura $ni = -ddx$, $i\mu$ ou $tT = ddy$. Ayant mené par le point S la ligne $S\gamma$ perpendiculaire à Mm, on trouve

que l'action réſultante de la réſiſtance du Fluide ſuivant mS eſt $\frac{f\Phi u \cdot mS^2}{\Phi g \cdot Mm^2}$, & que l'effort qui en provient ſuivant $m\gamma$ eſt $\frac{f\Phi u \cdot mS^3}{\Phi g \cdot Mm^3}$. Quant à l'effort de la peſanteur ſuivant Mg, on trouve qu'il eſt égal à $p \times \frac{Mf}{Mm}$ (mf eſt ſuppoſée une ligne horizontale, & Mf une ligne verticale).

On aura donc ces trois Equations,

$$1^{\circ}.\ p\,dy - \frac{f\Phi u \cdot ds^3}{\Phi g \cdot (dx^2 + dy^2 + ds^2)} = mu\,du.$$

$2^{\circ}.\ -ddx = \frac{f\Phi u \cdot ds^2}{muu\Phi g}$. 3°. Enfin $mddy = \frac{p(dx^2+dy^2+ds^2)}{uu}$.

Si la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, on aura $-ddx = \frac{fds^2}{mgg}$, d'où l'on tire $\frac{dx}{ds} - A = \frac{fx}{mgg}$ (j'appelle A ce que devient $\frac{dx}{ds}$ lorſque $x = 0$) : par conſéquent $ds = \frac{mggdx}{mgg \cdot A + fx}$; & cette valeur de ds étant miſe dans la premiere & la troiſiéme des deux Equations précédentes, on aura, en chaſſant u, l'Equation de la courbe de projection Qqt en ſecondes différences.

On peut obſerver en paſſant, que l'Equation $ds = \frac{mggdx}{mgg \cdot A + fx}$ eſt celle de la projection de la courbe Mm ſur un plan horizontal qui paſſeroit par $Pp\pi$.

REMARQUE III.

321. Si la ſurface plane BFN (Fig. 107.) eſt ſituée horizontalement dans le Fluide, on peut déterminer alors en général la courbe qu'elle doit décrire, quelle que ſoit la loi de réſiſtance & le rapport de la réſiſtance initiale à la peſanteur. Car la peſanteur agiſſant ſuivant la ligne DN, & la réſiſtance ſuivant DQ, la direction de ces deux forces dans tous les points de la courbe ſera toujours verticale, d'où il s'enſuit que la petite ligne Dg ou dy ſera toujours proportionnelle au tems employé à décrire l'Arc Du. Donc $\frac{dy}{g} = \frac{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{u}$, g étant une conſtante priſe pour garder la loi des homogenes. De plus, la force ſuivant DQ ou DN eſt $p - \frac{f\phi u}{\phi g}(\frac{uu-gg}{uu})$, & l'on a

$p - \frac{f\phi u}{\phi g}(\frac{uu-gg}{uu})\,dx = mu\,du$. Cette derniere Equation combinée avec l'Equation $\frac{dy}{g} = \frac{dx}{\sqrt{[uu-gg]}}$ donnera la conſtruction de la courbe. Pour déterminer la conſtante g, on fera attention qu'à l'origine de la courbe, on a $\frac{dy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}} = \frac{h}{\sqrt{[aa+hh]}} = \frac{g}{g}$. donc $g = \frac{gh}{\sqrt{[aa+hh]}}$.

Si la vîteſſe initiale ſuivant DA eſt telle que la réſiſtance du Fluide faſſe équilibre avec l'action de la peſanteur ſuivant DN, la ſurface BFN ſera mûe uniformément en ligne droite ſuivant DA.

§. II.

Du mouvement d'un plan circulaire, ou d'une Sphere, dans un milieu de denſité variable.

PROBLÊME I.

322. *Un Cercle* CDB (Fig. 108.) *étant pouſſé ſuivant la direction* CA, *dans un milieu compoſé de couches parallèles d'une denſité variable, auxquelles le plan de ce Cercle* CDB *ſoit perpendiculaire, trouver la réſiſtance que le Fluide lui fait à chaque inſtant.*

Soit PVQ la ſurface du Fluide. Ayant tiré par le centre C la ligne OCT parallèle à PVQ, on menera la ligne indéfinie VCG, perpendiculaire aux tranches PVQ, OCT. Nous ſuppoſerons que dans chaque tranche en particulier comme PVQ, OCT, &c. toutes les particules ayent la même denſité, & que dans chacune de ces tranches la denſité ſoit proportionnelle à une fonction quelconque des diſtances correſpondantes VC, que nous exprimerons ainſi, $\Delta\,(VC)$.

Si on nomme préſentement u la vîteſſe du centre C ſuivant CA, f la réſiſtance que feroit le Fluide à une ligne donnée comme CA, s'il venoit frapper cette ligne perpendiculairement avec une vîteſſe donnée g, & qu'il fût d'une denſité uniforme, égale à celle qu'il a à une diſtance donnée i de la ſurface PVQ; qu'enfin on ſuppoſe la réſiſtance, toutes choſes d'ailleurs égales, en raiſon compoſée des denſités & d'une fonction quelconque

φu,

ϕu, ϕg des vîteſſes, on trouvera que l'action du Fluide ſuivant mC ſur le petit côté mr, eſt $\frac{f\phi u \times \Delta(Vi) \times Ff \times CF^2}{\phi g . \Delta(i) . mF . CA^2}$; que l'effort qui en réſulte ſuivant CN, eſt $\frac{f\phi u \times \Delta(Vi) \times Ff . CF^3}{\phi g \Delta . (i) . mF CA^3}$; & que l'effort ſuivant $Cb = \frac{f\phi x \times \Delta(Vi) \times Ff . CF^2}{\phi g . \Delta(i) . CA^3}$.

On trouve de même, que l'effort ſuivant CN réſultant de l'impreſſion du Fluide ſur le côté MR, eſt $\frac{f\phi u \times \Delta(VI) \times Ff . CF^3}{\phi g \cdot \Delta(i) mF . CA^3}$, & que l'effort ſuivant CB eſt égal à $\frac{f\phi u \times \Delta(VI) \times Ff . CF^2}{\phi g \cdot \Delta(i) . CA^3}$.

Donc l'effort ſuivant CN réſultant de l'impreſſion faite ſur les deux côtés mr, MR, eſt $\frac{f\phi u \times Ff \times CF^3 \times [\Delta(Vi) + \Delta(VI)]}{\phi g . mF . CA^3 . \Delta(i)}$; & l'effort ſuivant $Cb = \frac{f\phi u \times Ff . CF^2 \times [\Delta(Vi) - \Delta(VI)]}{\phi g . CA^3 . \Delta(i)}$.

Si on nomme à préſent les données CA, a; CG, ϵ; VC, α; & l'indéterminée AF, t, on aura $Ff = dt$; $Fm = V[2at - tt]$, $AG = V[aa - \epsilon\epsilon]$, $Ck = \frac{\epsilon \cdot (a-t)}{a}$; kI ou $ki = \frac{V[aa-\epsilon\epsilon] . V[2at-tt]}{a}$, & par conſéquent $Vi = VC + Ci = \alpha + \frac{\epsilon \cdot (a-t) + V[aa-\epsilon\epsilon] . V[2at-tt]}{a}$;

& VI ou $VC-CI=\alpha-\frac{V[aa-\varepsilon\varepsilon].V[2at-tt]-\varepsilon.(a-t)}{a}$;

On ſubſtituera maintenant dans les expreſſions précédentes des efforts ſuivant CN & Cb, à la place des lignes qui y entrent, les valeurs analytiques de ces lignes qu'on vient de trouver. On prendra enſuite l'intégrale de chacune de ces expreſſions, en ne regardant que t comme variable, & la valeur de cette intégrale lorſque $t=a$, exprimera l'effort total, tant ſuivant CN que ſuivant Cb. *Ce Q. F. Trouver.*

COROLLAIRE.

323. Si le Cercle CDB eſt ſuppoſé très-petit, alors il eſt évident que chacune des lignes CI, Ci, eſt très-petite par rapport à VC (α). D'où il s'enſuit, que ſi en regardant α comme variable, on prend la différence de $\Delta(\alpha)$ que je ſuppoſe $=d\sigma\,\Gamma(\alpha)$ ($\Gamma\alpha$ exprimant une fonction de (α) on pourra ſuppoſer $\Delta(Vi)=\Delta(\alpha)+Ci.\Gamma(\alpha)$ & $\Delta(VI)=\Delta(\alpha)-CI.\Gamma(\alpha)$. Ainſi l'élément de l'effort ſuivant CN, eſt pour lors....;

$$\frac{f\varphi u\times(a-t)^3\,dt\times[2\Delta(\alpha)+\frac{2\varepsilon(a-t).\Gamma(\alpha)}{a}]}{\varphi g.a^3\,V[2at-tt].\Delta(i)}$$

, & l'élément de l'effort ſuivant Cb, eſt

$$\frac{f\varphi u\times(a-t)^2.dt\times 2V[aa-\varepsilon\varepsilon].V[2at-tt].\Gamma(\alpha)}{\varphi g.a^3.a\Delta(i)}$$

Donc l'effort ſuivant CN, eſt

$$\frac{f\varphi u.2\Delta(\alpha)}{\varphi g.\Delta(i)}\left(\frac{3aa.V[2at-tt]-(2at-tt)^{\frac{3}{2}}}{3a^3}+\frac{f\varphi u}{\varphi g}\times\frac{2\varepsilon\Gamma(\alpha)}{\Delta(i)}\times\right.$$

$$\left(\frac{4.(a-t)^3\sqrt{[2at-tt]}+3\int aadt\sqrt{[2at-tt]}+3.(a-t).(2at-tt)^{\frac{3}{2}}}{4a^4}\right);$$

& si l'on fait $t=a$, on aura l'effort entier suivant CN égal à $\frac{f\phi u}{\phi g}\left(\frac{2\Delta(\alpha)}{3\Delta(i)}+\frac{3\varepsilon\Gamma(\alpha).c}{2\Delta(i).8a}\right)$ en supposant que c soit la circonférence $DbAD$ du Cercle proposé. On remarquera que dans cette expression, le terme $\frac{f\phi u\times 3\varepsilon\Gamma(\alpha).c}{\phi g.2\Delta(i).8a}$ est infiniment petit par rapport à l'autre, & qu'ainsi, on peut, si l'on veut, le négliger.

On trouvera de même que l'effort suivant Cb, est $\frac{f\phi u}{\phi g}\times\frac{2\sqrt{[aa-\varepsilon\varepsilon]}.\Gamma(\alpha)}{\Delta(i)}\times\frac{(a-t).(2at-tt)^{\frac{3}{2}}+\int aadt\sqrt{[2at-tt]}}{4a^4}$; & par conséquent l'effort total suivant Cb, sera égal à $\frac{f\phi u\times[aa-\varepsilon\varepsilon].\Gamma(\alpha)\times c}{\phi g.2\Delta(i).8a}$.

PROBLÊME II.

324. *Trouver la courbe décrite par le centre* C *d'un petit Cercle* C B A *sans pesanteur, mû dans un milieu de densité variable.*

Ayant appellé x la ligne VC (Fig. 109.) qu'on avoit nommée α dans l'art. précédent, CO, dx, Ou, dy, & m la masse du Cercle proposé, on a ces deux Equations,

$$(3)\ldots\ldots\frac{f\phi u.2\Delta(x)}{\phi g.3\Delta(i)}.\sqrt{[dx^2+dy^2]}=-mudu,$$

$$\&\ \frac{cf\phi u.dy.\Gamma(x).(dx^2+dy^2)}{\phi g.16uu\Delta(i)}=mdxddy\ldots\ldots(4).$$

Si l'on ſuppoſe préſentement la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, & qu'on faſſe $ady = z\,dx$ & $gg = \frac{2fe}{m}$, il vient

$$\frac{c\,dx\,\Upsilon(x)}{2.16\,\Delta(i)} = \frac{eaadz}{z.(aa+zz)}$$

dont l'intégrale (en ſuppoſant qu'à l'origine de la courbe $x = r$, $z = h$) eſt

$$\frac{c[\Delta(x) - \Delta(r)]}{2e.16\,\Delta(i)} = \log.\frac{zV[aa+hh]}{hV[aa+zz]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Par le moyen de cette Equation, & de l'Equation $ady = z\,dx$, on conſtruira ſans peine la courbe cherchée. *Ce Q. F. Trouver.*

COROLLAIRE I.

325. Dans l'Equation (5) que nous venons de trouver, & qui ſert à conſtruire la courbe quand la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe; il eſt à remarquer que $\frac{z}{V[aa+zz]}$ exprime le Sinus de l'angle ACa à chaque point de la courbe, & que par conſéquent $\log.\frac{zV[aa+hh]}{hV[aa+zz]}$, exprime le Logarithme du rapport de ce Sinus avec le Sinus du premier angle dont la tangente eſt h, & qu'on peut appeller *angle de projection.*

De-là il s'enſuit, que *ſi deux Cercles égaux, décrivent dans le même milieu, de denſité variable, & réſiſtant comme le quarré de la vîteſſe, deux courbes différentes* Q M S,

RCK, (Fig. 110.) *le Sinus de l'angle* NMS *eſt au Sinus de l'angle correſpondant* LCK *dans la raiſon conſtante du Sinus de l'angle* TQO *au Sinus de l'angle* GRF.

REMARQUE I.

326. On peut encore démontrer la raiſon conſtante des Sinus des angles NMS, LCK, par une autre Méthode fort ſimple, & qui fait voir en même-tems que cette propriété n'a lieu que dans le cas où $\varphi u = uu$.

Pour cela, on remarquera que ſi le Sinus de l'angle ACM (Fig. 111 & 112.) eſt au Sinus de l'angle BCM qui en differe infiniment peu, comme le Sinus de l'angle acM au Sinus de l'angle bcM, on aura $\frac{AO}{AM} = \frac{ao}{aM}$, & par conſéquent $\frac{AB \times CM}{AC.AM} = \frac{ab.cM}{ac.aM}$. D'où il s'enſuit, qu'afin que le Sinus de l'angle NMS (Fig. 110.) ſoit toujours en raiſon conſtante avec le Sinus de l'angle LCK, il faut qu'en général pour une même abſciſſe $QT(x)$, l'angle de contingence multiplié par le rapport de dx à dy ſoit une quantité conſtante. Or l'Equation générale (4) de l'*article* 324, donne $\frac{cfdx\Gamma(x)\varphi u}{16muu\Delta(i).\Phi g}$ pour le produit de l'angle de contingence $\frac{dxddy}{dx^2+dy^2}$ par $\frac{dx}{dy}$; & l'on voit que pour une même x ce rapport eſt toujours le même dans le cas où $\varphi u = uu$, & qu'il ne peut être le même dans aucun autre cas, qu'en ſuppoſant que u ſoit toujours la même

pour une même x dans deux courbes différentes. Mais l'Equation (3) de l'*article* 324, fait voir que cela eſt impoſſible. Donc &c.

COROL. II.

327. L'Equation (5) de l'*article* 324, fait voir que pour un même angle de projection, toutes choſes d'ailleurs égales, la courbe décrite eſt toujours la même, quelle que ſoit la vîteſſe initiale. Car la ſeule quantité qui pût faire varier la courbe dans les différens cas, eſt la quantité $e = \frac{mgg}{2f}$, & cette quantité eſt toujours la même, 1°. parce que g eſt une vîteſſe quelconque indépendante de la vîteſſe initiale. 2°. Parce que quand on prendroit g pour la vîteſſe initiale, on auroit toujours dans le cas préſent, $\frac{gg}{2f}$ conſtante. Donc &c.

En prenant g pour une vîteſſe quelconque donnée, l'Equation $e = \frac{mgg}{2f}$, fait voir que pour deux petits Cercles inégaux de même matiere & de même denſité, e eſt proportionnelle au rayon de chacun, puiſque f eſt comme a & m comme aa. Donc $\frac{c}{e}$ eſt une quantité conſtante. Donc *quelque différence qu'il y ait dans les rayons des deux Cercles & dans leurs vîteſſes initiales, ils décriront la même courbe, toutes choſes d'ailleurs égales, pourvû que la réſiſtance ſoit comme le quarré de la vîteſſe.*

Il n'en ſeroit pas ainſi, ſi les deux Cercles n'étoient pas de la même matiere. Car alors m ne ſeroit plus comme aa, mais comme paa, p étant une variable qui dépendroit de la denſité de la matiere du Cercle.

REMARQUE II.

328. Lorſque e n'eſt pas infiniment grande par rapport à a, ce qui arrive, quand la denſité du milieu a un rapport fini avec celle du Cercle, la courbe que le Cercle décrit n'eſt point alors, comme on pourroit d'abord le penſer, une courbe peu différente de la ligne droite, mais elle a une courbure très-ſenſible, comme on le voit par l'Equation entre z & x. Ce qui d'ailleurs ne doit pas paroître ſurprenant, puiſque la force f, comme il eſt aiſé de le voir, eſt proportionnelle à a; & la force ſuivant Cb, (Figure 109.) toutes choſes d'ailleurs égales, proportionnelle à aa. Or la maſſe à mouvoir, qui eſt celle du Cercle, eſt auſſi proportionnelle à aa. Donc l'effort que fait la force ſuivant Cb ſur la maſſe infiniment petite m, pour l'écarter de ſa direction, eſt analogue à celui que feroit la réſiſtance du Fluide ſur un Cercle de grandeur finie. Donc &c.

Il me paroît donc qu'on doit entendre avec quelque reſtriction ce que dit M. *Newton* dans le Scol. de la Propoſ. 16. L. II. de ſes Principes. *Que dans les recherches qu'il a faites ſur les trajectoires décrites par des Corps dans des milieux d'une denſité variable, il a ſuppoſé que le mobile étoit aſſez petit pour pouvoir être regardé à cha-*

que inſtant, comme étant dans un milieu de denſité uniforme. * On ne peut faire cette ſuppoſition que dans le cas où la force ſuivant *Cb* eſt infiniment petite par rapport à la force centripete, ſuppoſition qui n'eſt légitime, phyſiquement parlant, que quand la denſité du milieu eſt très-petite par rapport à celle du mobile.

COROL. III.

329. Si la denſité augmente à meſure que x augmente, la courbe ſera convexe vers l'Axe des x, & on aura $z = \infty$, lorſque $\frac{c[\Delta(x) - \Delta(r)]}{2e.16\Delta(i)} = L^{**}\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{h}$. Il eſt facile de s'aſſurer que la courbe remontera enſuite, en tournant ſa concavité vers l'Axe des x, par une branche égale & ſemblable à la premiere.

REMARQUE III.

330. Si deux milieux AB, CD, (Fig. 114.) d'une denſité uniforme, ou qui varie très-peu dans une grande étendue ſont ſéparés par un milieu BC, dont les différentes couches varient beaucoup de denſité dans un très-petit eſpace, & dont la denſité en B & en C ſoit la même que celle des deux milieux qui lui ſont contigus, il eſt aiſé de conclure de tout ce qui a été dit juſqu'ici, qu'un plan circulaire ou un Corps ſphérique (car nous ferons

* *Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeò parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat.*

** Cette lettre *L* ſignifie *Logarithme.*

voir

voir ci-après & indépendamment de ceci, que tout ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique à la Sphere); il est aisé de conclure, dis-je, qu'un tel Corps, si on le suppose d'un diametre très-petit par rapport à BC, traversera d'abord le milieu AB en ligne droite, souffrira ensuite une réfraction dans le milieu BC, & traversera enfin en ligne droite le milieu CD, de façon que le Sinus d'incidence en B sera au Sinus de réfraction en C en raison constante; que la réfraction se fera en s'approchant de la perpendiculaire, si la densité du milieu va en diminuant de B en C, & au contraire si elle va en augmentant; & que dans ce dernier cas la réfraction pourra même se changer quelquefois en réflexion (*art.* 329.)

Comme ceci pourroit conduire à une explication de la réfraction de la lumiere assez plausible en apparence, j'ai cru qu'il ne seroit pas hors de propos d'examiner ici plus en détail, si cette explication peut se concilier en effet avec tous les Phenomenes.

La différente réfrangibilité des rayons diversement colorés, ne sera pas le point le plus difficile à expliquer. Il n'y aura qu'à supposer (*art.* 327.) que la différence des couleurs vient, non de la différente vîtesse des rayons, mais de la différence de matiere & de densité des Globules lumineux.

Un autre Phenomene, est que la réfraction n'affoiblit pas sensiblement la lumiere, & qu'un rayon qui a traversé, par exemple, un verre plan d'une très-petite épaisseur, n'a rien perdu sensiblement de sa

force. Voyons si l'explication de ce Phenomene dans notre hypothèse est aussi facile que celle des précédentes.

Soit $N n$ (Fig. 115.) le verre, & AB, ab, l'air; BC, cb, la petite Atmosphere qui cause la réfraction, & dont on peut supposer, si l'on veut, qu'une partie entre dans le verre. Comme la réfraction de l'air dans le verre se fait en s'approchant de la perpendiculaire, il est nécessaire que l'Atmophere BC aille en diminuant de densité de B en C. Par la même raison, on ne peut supposer que cette Atmosphere ne commence qu'en B, & que l'espace AB qui est au-dessus soit regardé comme vuide. Car alors la Sphere en entrant dans le milieu B souffriroit une réfraction, qui dérangeroit entiérement (*article* 278.) le rapport constant des Sinus; d'ailleurs, si l'incidence du rayon étoit fort oblique, il se réfléchiroit sans entrer dans le verre; ce qui est contre l'Expérience.

L'Equation entre les x & les z de la courbe que le rayon décrit dans l'espace BC, est $\frac{c[\Delta(x)-\Delta(r)]}{32e\Delta(i)} = L\frac{2\sqrt{[aa+hh]}}{h\sqrt{[aa+zz]}}$, où $\Delta(r)$ exprime la densité en B, c'est-à-dire, la densité du milieu AB, & où l'on peut supposer $\Delta(r) = \Delta(i)$. Or le rapport des Sinus de l'air dans le verre étant celui de 3 à 2, il s'ensuit que si on appelle C la densité en C, B la densité en B, on aura $\frac{c}{32e} = \frac{B.L\frac{3}{2}}{B-C}$ donc e ne sauroit être plus grand que $\frac{c}{32L\frac{3}{2}}$. On a de plus, $e = \frac{mgg}{2f}$, f exprimant la résistance du milieu AB. D'où il

eſt aiſé de conclure, que le Logarithme du rapport de la vîteſſe en B à la vîteſſe en A ſeroit $-\frac{AB}{e}$, quantité plus grande ou au moins égale à $\frac{(3^2[L3-L2]).AB}{c}$. Or comme c doit être ſuppoſé très-petit par rapport à BC, il s'enſuit, à plus forte raiſon, qu'il doit être très-petit par rapport à AB. D'où il s'enſuit 1°. que les rayons de lumiere arriveroient à nos yeux avec une vîteſſe preſqu'infiniment plus petite, que celle qu'ils ont en ſortant du Soleil. Or la Théorie de l'aberration, qui paroît prouver le ſyſtême de l'émiſſion des Corpuſcules lumineux (*Voyez le troiſiéme Volume de nos Opuſcules Mathématiques*, pag. 400, *art.* 972) prouve au moins qu'en admettant cette hypothèſe, on doit ſuppoſer que les rayons de lumiere ne perdent rien, ou preſque rien de leur vîteſſe, en venant du Soleil juſqu'à nous. 2°. Comme les eſpaces BC, cb ſont ſuppoſés très-grands par rapport au diamétre des Corpuſcules lumineux, il eſt clair que le rayon en traverſant ces eſpaces doit faire encore une perte conſidérable de ſa vîteſſe, & paroître beaucoup plus foible à ſa ſortie qu'il n'étoit à ſon entrée; ce qui ne s'accorde nullement avec ce que nous éprouvons tous les jours. Ces deux raiſons réunies me font croire, indépendamment de quelques difficultés Phyſiques, qu'on pourroit propoſer ſur les Atmoſpheres conſidérées en elles-mêmes, que l'explication précédente de la réfraction de la lumiere, quoiqu'en apparence fort exacte, ne peut cependant ſe concilier avec les Phenomenes.

Au reſte, il eſt aiſé de voir que dans cette hypothèſe des petits Atmoſpheres, ſi on nomme m le rapport du Sinus de réfraction au Sinus d'incidence, on aura $\log. m = \frac{A}{p}$, A étant une quantité qui dépend de la denſité du milieu, & p une quantité qui dépend de la denſité des Corpuſcules lumineux; denſité qui doit produire dans cette hypothèſe la différence de réfrangibilité (*art.* 327.); donc ſi on nomme m' le rapport des Sinus pour des rayons d'une autre couleur, on aura $\frac{\log. m}{\log. m'} =$ à une conſtante, quel que ſoit le milieu réfringent. C'eſt l'hypothèſe dont s'eſt ſervi M. *Euler* pour expliquer les Phenomenes de la réfraction. Sur quoi voyez le Tom. III *de nos Opuſcules*, depuis *l'art.* 880, juſques & compris *l'art.* 895.

COROL. IV.

331. Si dans l'*article* 324, on ſuppoſe la réſiſtance comme une puiſſance u^n de la vîteſſe, on aura les deux Equations

$$\frac{fdx}{g^n}\cdot\left(\frac{2\Delta(x)\sqrt{[aa+\zeta\zeta]}}{3a\Delta(i)}\right) = -mu^{1-n}du,$$

$$\&\ \frac{cf\zeta\cdot[aa+\zeta\zeta]\cdot dx\Gamma(x)}{16aag^n d\zeta\Delta(i)} = mu^{2-n}.$$

On différentiera cette derniere Equation, & égalant enſuite les deux valeurs de $mu^{1-n}du$, on aura, en ſuppoſant $\frac{\zeta}{\sqrt{[aa+\zeta\zeta]}} = \frac{t}{a}$,

$$[n-2]\left(\frac{2\Delta(x).a}{3\Delta(i)\sqrt{[aa-tt]}}\right) = d\left(\frac{ct\Gamma(x)}{16dt\Delta(i)}\right).$$

Cette Equation eſt intégrable en quelques cas. Car ſoit, par exemple, $\Delta(x) = q^x$, q repréſentant le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, on aura, en faiſant $dt = t\,ds$ & $dx = p\,ds$,

$[n-2]\left(\frac{2apds}{3\sqrt{[aa+q^s]}}\right) = \frac{cdp+cppds}{16}$, équation dans laquelle les variables p, s, peuvent être ſéparées facilement.

On peut donc conſtruire la courbe, lorſque $\varphi u = u^n$ & $\Delta(x) = q^x$; & il eſt à remarquer (*art.* 81.) que l'hypothèſe des denſités proportionnelles à q^x eſt celle que l'on fait ordinairement, des denſités proportionnelles aux poids comprimans, ou aux poids comprimans augmentés d'une quantité conſtante.

REMARQUE IV.

332. Il n'a été queſtion juſqu'à préſent que de la courbe décrite par un très-petit Cercle dans un milieu de denſité variable. Il y a cependant des cas où il n'y a pas plus de difficulté pour un grand Cercle que pour un petit. Par exemple, ſi la denſité du milieu eſt proportionnelle à $g+x$, γ étant une conſtante quelconque, l'expreſſion de la force ſuivant Cb, ſe trouve la même pour un grand Cercle que pour un petit. La ſolution du Problême eſt donc alors la même pour tous les cas, & ce que nous avons dit (*articles* 323, 324, 325, 329,) doit s'appliquer ici.

COROL. V.

333. Si le milieu étoit diſpoſé par tranches circulaires PVQ, βCq (Fig. 116), & qu'on ſuppoſât le Cercle NCB

très-petit, la queſtion ne ſeroit pas plus difficile : car nommant la donnée VG, k, & CG, x, il n'y auroit qu'à mettre $k - x$ au lieu de α dans l'expreſſion de l'effort ſuivant CN, & de l'effort ſuivant Cb.

Si la réſiſtance eſt comme le quarré de la vîteſſe, le rayon de la développée $\frac{Ci^2}{oi}$ ſera en raiſon inverſe de $\frac{cf\Gamma(k-x).V[aa-\xi\xi]}{16amgg\triangle(i)}$. Or ſi du point G on abaiſſe ſur CA la perpendiculaire GS que nous nommerons s, on trouve $\frac{Ci^2}{oi} = \frac{x\,dx}{-ds}$, & $\frac{V[aa-\xi\xi]}{a} = \frac{s}{x}$; donc ſi on met pour s ſa valeur $\frac{x\zeta}{V[aa+\zeta\zeta]}$, on aura $\frac{-aad\zeta}{\zeta.aa+\zeta\zeta} = \frac{dx}{x} + \frac{cdx\Gamma k(-x)}{32\triangle(i)}$, Equation qui ſervira à conſtruire la courbe, & d'où l'on tirera le même Théorême que dans l'*art.* 325, en ſuppoſant que dans la Figure 110 les lignes QR, $TMGC$, ſoient des Cercles concentriques.

PROBLÊME III.

334. *Une Sphere ſans peſanteur étant mûe ſuivant une direction quelconque dans un Fluide d'une denſité variable, trouver la réſiſtance que fait le Fluide à cette Sphere.*

Soit CA (Fig. 113.) la direction du centre C; on fera paſſer par la ligne CA un plan perpendiculaire aux tranches PVQ, OCS, qui formera dans la ſurface de la Sphere le grand Cercle $CABD$; on imaginera enſuite le plan FZK perpendiculaire au plan CBA, & dont la com-

mune section FK avec le plan CBA soit perpendiculaire à CA, & on supposera que le plan fzk soit infiniment proche & parallèle à FZK, ce qui formera sur la surface de la Sphere, la demi-Zone circulaire $FKkf$. Nous commencerons par chercher les efforts, tant suivant CN que suivant Cb, qui résultent de la résistance du Fluide à la demi-Zone $FkKf$.

Pour cela, nous prendrons d'abord deux Arcs $Z\epsilon$, Zu, égaux entr'eux, de part & d'autre du point de milieu Z de la demi-Zone. Nous nommerons CA, a, la circonférence $DABD$, c, & nous supposerons que f soit la résistance que feroit le Fluide à la surface circulaire $DACBD$, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une vîtesse donnée g, & qu'il fut d'une densité uniforme égale à celle qu'il a à la distance i de la tranche PVQ; enfin nous appellerons les données VC, α, AG, ϵ, & u la vîtesse du centre C suivant CA.

Qu'on mene présentement dans le Cercle FZK les ordonnées ϵr, uR, & par les points r, R, les perpendiculaires RI, ri dans le plan CAB; il est clair que si on supposoit la densité du Fluide uniforme par-tout, & égale à la densité qu'il a à la distance i du point V, l'effort suivant Cb résultant de la résistance du Fluide à la petite surface $ehgo$, seroit (comme nous l'avons démontré dans l'*article* 296, *n.* 8.) $\frac{f\Phi ux2DF^2.Df.d(\epsilon r)}{\Phi g.ca.Ff^2}$; mais comme la densité n'est pas uniforme, & que $\Delta(Vi)$ exprime la densité en ϵ, il faut multiplier l'expression précédente

par $\frac{\Delta(Vi)}{\Delta(i)}$, & l'on aura $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df . d(\varepsilon r) \times \Delta(Vi)}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)}$. On aura de même $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df \times \Delta(VI)}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)} \times d(\varepsilon r)$ pour l'effort ſuivant CB, réſultant de la réſiſtance du Fluide à la petite ſurface $unlm$; & l'effort qui réſulte de ces deux-là ſuivant Cb, ſera $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df \times d(\varepsilon r) \times [\Delta(Vi) - \Delta(VI)]}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)}$. Nous nommerons à préſent CO, γ; OF ou $O\varepsilon$, β; εr, t; & nous aurons $Cd = \frac{\gamma\varepsilon}{a}$, Id ou $id = \frac{OR \times AG}{CA} = \frac{\sqrt{[\beta\beta - tt]} . \sqrt{[aa - \varepsilon\varepsilon]}}{a}$: ces différentes valeurs étant ſubſtituées dans l'expreſſion précédente de l'effort ſuivant Cb, on aura la différentielle de cet effort; on intégrera cette quantité en ne faiſant varier que t qui eſt en effet dans la ſuppoſition préſente la ſeule variable, & l'on aura l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance du Fluide à la demi-Zone $FKkf$. Si on double cette intégrale, on aura l'effort ſuivant Cb provenant de la réſiſtance faite à la Zone entiere; enfin, ſi on intégre de nouveau, en regardant CO, OF comme variables, & mettant $\frac{2CO^2}{CA^2} \times Df$ à la place de $\frac{2DF^2 . Df}{Ff^2}$ dans l'expreſſion précédente, on aura l'effort cherché ſuivant Cb.

Nous ſuppoſerons afin de ſimplifier le calcul que la Sphere $CBAB$ ſoit très-petite; en ce cas, on trouvera par une Méthode ſemblable à celle de l'*article 323*, que l'effort entier ſuivant CB, eſt

$2f\varphi u$

$\frac{2f\phi u.2DF^2.Df.2V[aa-\varepsilon\varepsilon].FZO.\Gamma(\alpha)}{\phi g.ca.Ff^2.a\Delta(i)}$. Mais le demi-Cercle $2.FZO$ eſt au demi-Cercle DAa $(\frac{ca}{4})$ :: OF^2, CA^2. Donc l'expreſſion précédente ſe change en

$$\frac{f\phi u}{\phi g}\times\frac{OF^2.DF^2.Df.V[aa-\varepsilon\varepsilon].\Gamma(\alpha)}{CA.Ff^2.a\Delta(i)},$$

Expreſſion de l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance faite à la Zone entiere.

Soit à préſent $CO=x$, on aura $OF=V[aa-xx]$; & l'expreſſion précédente deviendra

$\frac{f\phi u}{\phi g}.\frac{\Gamma(\alpha)V[aa-\varepsilon\varepsilon]}{a\Delta(i)}\times\frac{-x^2dx.(aa-xx)}{a^4}$, dont l'intégrale complette eſt

$$\frac{2f\phi u.\Gamma(\alpha)V[aa-\varepsilon\varepsilon]}{15\phi g.\Delta(i)},$$

Expreſſion de l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance faite à la Sphere ou demi-Sphere entiere.

On trouvera de même que l'effort total ſuivant CN, eſt $\frac{2f\phi u\times\Delta(\alpha)}{\phi g.4\Delta(i)}+\frac{4f\phi u\times\varepsilon\Gamma(\alpha)}{\phi g.5\Delta(i)}$. On peut, ſi l'on veut, négliger le ſecond terme de cette expreſſion qui eſt nul par rapport au premier.

COROLLAIRE.

335. Les expreſſions précédentes des efforts ſuivant CN & Cb, étant les mêmes pour la Sphere que pour le Cercle à quelques coefficiens près, tout ce qu'on a dit depuis l'*article* 324, juſqu'au 333, incluſivement, peut aiſément s'appliquer à la Sphere.

REMARQUE I.

336. Si on ſuppoſoit la Sphere peſante, il ſeroit aiſé de trouver l'Equation de la courbe qu'elle décriroit, & la difficulté ne pourroit être que dans le calcul.

REMARQUE II.

337. Si un parallélogramme rectangle ſans peſanteur $BFGD$ (Fig. 117.) étoit ſitué dans un milieu de denſité variable, de maniere que la diagonale GCB de ce parallélogramme fut parallèle à la ſurface PVQ du Fluide, ce parallélogramme, pouſſé ſuivant la direction de l'autre diagonale CD, iroit dans le Fluide en ligne droite.

Cette propoſition eſt ſi facile à démontrer, & ſi analogue à celle que nous avons prouvée (*article* 307.) au Chap. ſur la Réfraction, que nous jugeons inutile de nous y arrêter.

§. III.

Où l'on réſout les Problêmes précédens & quelques autres, dans l'hypothèſe que le Fluide ſoit en mouvement.

PROBLÊME I.

338. *Trouver la courbe décrite par un parallélogramme rectangle ſans peſanteur, pouſſé ſuivant une direction* CE (Fig. 118.) *& avec une vîteſſe quelconque, dans un Fluide qui ſe meut auſſi uniformément ſuivant une direction quelconque* DP.

Soit DM parallèle à CE, & ſoit DM à DP comme la vîteſſe du parallélogramme dans un inſtant propoſé eſt

à la vîteſſe du Fluide. Si on regarde la vîteſſe DP comme compoſée des deux DM & DZ; il eſt évident que la vîteſſe DM étant commune au Fluide & au parallélogramme, le Fluide n'agira ſur le parallélogramme qu'avec la vîteſſe & ſuivant la direction DZ; d'où l'on voit que l'action du Fluide s'exercera, ou ſur les côtés FB, HB, ou ſur le côté HB ſeul, ou ſur les côtés GH, HB, ſelon que la ligne OD ſera ſituée par rapport à ces côtés.

Soit à préſent C (Fig. 119.) le centre du parallélogramme, CD ſa direction au premier inſtant, CP la direction du Fluide. Si l'on ſuppoſe que les petites lignes CD, CP, que le point C & le Fluide tendent à parcourir au premier inſtant, repréſentent leurs vîteſſes, DP ſera la direction de l'impreſſion du Fluide. Or ſi l'effort réſultant de cette impreſſion fait parcourir au centre C la ligne DE dans le premier inſtant, il s'enſuit que le centre C parcourera dans le premier inſtant la ligne CE. Dans le ſecond inſtant le point C tend à parcourir $Ed = CE$; ſi l'on fait le triangle dEp égal & ſemblable au triangle CEP, on voit encore que dp égale & parallèle à PE eſt la direction de l'impreſſion du Fluide, & on trouvera de la même façon le côté Ee que le centre C doit parcourir au ſecond inſtant. Maintenant, que par le point C on mene $C\delta$ égale & parallèle à PD, & qu'on ſuppoſe que la vîteſſe & la direction du parallélogramme dans le Fluide en repos ſoit repréſentée par $C\delta$, il eſt évident qu'en menant $\delta\varepsilon$ égale & parallèle à DE, la ligne $C\varepsilon$ ſera le premier petit côté de la courbe, & parallèle à PE; & par

la même raiſon, que le ſecond petit côté ϵe eſt égal & parallèle à pe. On voit de plus, que $ee = 2CP$ & que le tems employé à parcourir uniformément ee avec la vîteſſe du Fluide, ſeroit égal au tems par l'Arc $C\epsilon e$, & ainſi de ſuite : d'où l'on tire la ſolution ſuivante.

On conſtruira (*art.* 311.) la trajectoire $C\epsilon e$ décrite par le centre C, mû avec la vîteſſe & la direction $C\mathcal{S}$ dans le Fluide en repos. Par un point quelconque e de cette trajectoire, on tirera l'Ordonnée ee parallèle à CP, & telle que le tems employé à parcourir cette Ordonnée avec une vîteſſe uniforme égale à celle du Fluide, ſoit égal au tems par l'Arc $C\epsilon e$; je dis que le point e ſera à la courbe cherchée.

COROLLAIRE I.

339. Si la réſiſtance eſt comme une puiſſance quelconque n de la vîteſſe, nous avons vû (*art.* 312.) que la trajectoire $C\epsilon e$, a un cours infini lorſque $n =$ ou > 2. Donc dans ces cas-là, la trajectoire CEe aura auſſi un cours infini. Si $n < 2$ mais $=$ ou > 1, nous avons vû qu'en ce cas la trajectoire $C\epsilon e$ n'a qu'un cours fini, mais que le tems employé à la parcourir eſt infini. Donc dans ce même cas la trajectoire CEe a un cours infini, & une aſymptote parallèle à CP. Enfin ſi $n < 1$, comme dans ce cas la trajectoire $C\epsilon e$ n'a qu'un cours fini, & que le tems employé à la décrire eſt fini auſſi, la trajectoire CEe n'aura non plus qu'un cours fini. La tangente à l'extrémité de cette trajectoire ſera parallèle à CP, & la

vîteſſe du centre *C* à cette extrémité, ſera égale à la vîteſſe du Fluide. Donc le centre *C* après avoir décrit la courbe *CEe*, ne ſera plus que ſuivre la direction du courant.

On pourroit, ce me ſemble, conclure de-là, que ſi la réſiſtance des Fluides eſt proportionnelle à quelque puiſſance *n* de la vîteſſe, cette puiſſance *n* doit être moindre que l'unité. Car l'Expérience fait voir qu'un Corps, pouſſé ſuivant une direction quelconque dans une eau courante, ſe met aſſez promptement dans la direction du courant. Il eſt vrai que la réſiſtance vient alors en grande partie de la tenacité du Fluide, dont nous faiſons ici abſtraction.

COROL. II.

340. Comme la vîteſſe eſt nulle à la fin de la trajectoire *Cee*, & que la vîteſſe le long de l'Ordonnée *ee*, eſt conſtante, il eſt évident, comme nous venons de le remarquer, qu'à l'extrémité de la trajectoire *CEe* vers *e*, la tangente de cette trajectoire eſt parallèle à *CP*. D'où il s'enſuit que la trajectoire *CEe*, doit avoir un point d'inflexion, lorſque le rapport des vîteſſes initiales *CD*, *CP* eſt tel, que l'effort réſultant de l'impreſſion du Fluide, au lieu d'agir ſuivant *DE*, agit en ſens contraire, de façon que l'angle $PCE > PCD$. Ce qui arrive, par exemple, quand l'angle ODB (Fig. 118.) $> BCA$.

REMARQUE I.

341. On peut encore s'y prendre de la maniere ſuivante, pour déterminer l'impreſſion du Fluide ſur le pa-

rallélogramme, & la courbe qu'il doit décrire. Soit *CP* (Figure 120.) la vîteſſe & la direction du Fluide, *CI* la vîteſſe & la direction du rectangle. Qu'on imprime à ce rectangle & au Fluide une vîteſſe *Cp* égale à *CP*, & dans une direction contraire, la réſiſtance du Fluide demeurera la même qu'auparavant. Or le parallélogramme eſt alors dans le même cas, que s'il étoit mû dans le Fluide en repos ſuivant la direction *CV*, qui eſt à-la-fois diagonale du parallélogramme *CIVp* & côté du parallélogramme *CPIV*.

Donc ſi l'on cherche la trajectoire que le parallélogramme décriroit dans ce dernier cas, & qu'on faſſe enſuite mouvoir cette trajectoire uniformément ſuivant *CP*, en rendant ainſi au Fluide & au parallélogramme la vîteſſe qu'on leur avoit ôtée, il eſt clair qu'on aura la trajectoire qu'on cherche.

Quoique cette ſolution ſoit ſimple, je préférerois néanmoins celle de l'*article* 338, parce qu'on y voit plus clairement, ce me ſemble, que dans celle-ci, l'uſage & l'étendue du Principe de cette ſolution, & pourquoi on ne ſauroit s'en ſervir quand le mouvement du Fluide n'eſt pas uniforme.

REMARQUE II.

342. Si on vouloit réſoudre le Problême par le calcul ſans rien ſuppoſer de ce qui a été fait dans l'*art.* 338, on pourroit employer une Méthode ſemblable à celle de cet

art. 338 ; car appellant s le Sinus de l'angle PDB, s son Cosinus, on parviendroit à une Equation de cette forme

$$\ldots\ldots\ldots\left(\frac{baadz}{aa+zz}+\frac{bzdu}{u}\right).\left[a-\frac{es\sqrt{[aa+zz]}}{au}\right]^2=$$

$$\left(\frac{aadu}{u}-\frac{aazdz}{aa+zz}\right).\left[z-\frac{es\sqrt{[aa+zz]}}{au}\right]^2,$$

& faisant $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}=q$, on auroit

$$(bqdz-bzdq):(z-\tfrac{eqs}{a})^2=(-aadq):(a-\tfrac{esq}{a})^2;$$

dont l'intégrale est

$$M-bq:(z-\tfrac{eqs}{a})=-a^3:es(a-\tfrac{esq}{a}),$$ M étant une constante.

Corol. III.

343. Si une surface plane sans pesanteur est mûe obliquement dans un Fluide, qui se meuve aussi suivant une direction quelconque, ce Problême n'est qu'un cas particulier du précédent, lorsque la direction du Fluide & de la surface sont l'une & l'autre dans un même plan perpendiculaire au plan de la surface. Car le Problême se réduit alors (*article* 315.) au cas où la largeur du parallélogramme HB seroit infiniment petite.

Si les deux directions, de la figure plane, & du Fluide, sont dans un plan oblique au plan de cette figure, le Problême peut encore se résoudre très-aisément par la Méthode de l'*article* 338, ou celle de l'*article* 341. On observera que la courbe décrite en ce cas n'est pas à dou-

ble courbure, parce que la figure dans ſon mouvement demeure toujours parallèle à elle-même, & que le Fluide agit perpendiculairement à ſon plan ; la courbe aura tous ſes points dans un plan perpendiculaire à la figure, & ſera la coupe d'un Cylindre qui auroit pour baſe la courbe décrite dans le Fluide en repos, & dont les côtés ſeroient parallèles à la direction du Fluide.

Remarque III.

344. Suppoſons que *BFGH* (Figure 118.) ſoit un navire rectangle réduit à ſon centre *C* (Fig. 121.) : ſi la direction & la vîteſſe *CP* du vaiſſeau ſont données auſſi-bien que la direction & la vîteſſe *CT* de l'eau, il ſera facile de trouver la poſition de la voile *NS* & la vîteſſe du vent néceſſaires, pour que le navire aille uniformément en ligne droite. Car ayant trouvé la direction *YC* de l'effort réſultant de la réſiſtance du Fluide, & ayant mis la voile *NS* dans une ſituation perpendiculaire à *YC*, ſi on prend enſuite *ZC* ou ſon égale *Cz*, pour la vîteſſe avec laquelle le vent doit frapper la voile pour faire équilibre avec l'effort ſuivant *YC*, on décrira ſur les côtés *CP*, *Cz* le parallélogramme *CzQP*, dont la diagonale *CQ* marquera la vîteſſe & la direction du vent.

Si on regarde, ſuivant le Principe communément reçu, l'action des Fluides comme proportionnelle au quarré de leur vîteſſe, & que par le point *Z* on tire la ligne indéfinie *zζ* parallèle à la voile *NS* ; l'effort du vent frappant la voile obliquement avec la vîteſſe & la direction

tion $C\zeta$, ſera le même que s'il la frappoit perpendiculairement avec la vîteſſe Cz. Or la vîteſſe du vent par rapport à la voile en repos étant $C\zeta$, ſi on mene ζq parallèle & égale à CP ou zQ, on trouvera que la vîteſſe & la direction réelle du vent doit être la ligne Cq.

D'où il s'enſuit en général, que menant par le point Q la ligne indéfinie Qnq parallèle à NS, la vîteſſe & la direction du vent peut être repréſentée dans le cas précédent par telle ligne Cq qu'on voudra, terminée à l'indéfinie Qnq.

De-là ſe tire aiſément la ſolution de ce Problême. *La vîteſſe & la direction de l'eau ſuivant* CT *étant donnée avec la vîteſſe & la direction* Cq *du vent, & la poſition* NS *de la voile, trouver la direction & la vîteſſe* CP *du vaiſſeau.*

Pour cela, on menera d'abord qn (Figure 122.) parallèle à NS, ſur laquelle on abaiſſera la perpendiculaire Cn; nC ſera la direction de l'effort réſultant de la réſiſtance de l'eau. Cela poſé, on trouvera fort aiſément la direction $C\pi$ ſuivant laquelle le parallélogramme doit choquer le Fluide, & par le point T on menera $T\varpi$ parallèle à $C\pi$. On tirera enſuite la ligne TQ dont la poſition ſoit telle, que menant mi parallèle à Cn, Tm ſoit à mi comme la vîteſſe PT du Fluide eſt à celle que le vent doit avoir pour lui réſiſter ſuivant Cn (le rapport de ces vîteſſes eſt connu par l'Expérience, quoique l'une & l'autre vîteſſe ſoit inconnue). Par le point Q où cette ligne TQ rencontre Qn, on menera QP parallèle à nC.

Tirant enfin CP, je dis que cette ligne CP exprimera la vîteſſe & ſera la direction du vaiſſeau.

Problême II.

345. *Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême precédent, avec cette condition de plus, que le parallelogramme ſoit peſant, on demande la courbe qu'il doit decrire.*

Ce Problême ſe réſoudra entiérement par les mêmes Principes que le précédent; il eſt aiſé d'appliquer ici ces Principes, par le moyen deſquels toute la difficulté ſe réduit au cas où le Fluide ſeroit en repos. De-là & de l'*art.* 318, il s'enſuit que la conſtruction de la courbe eſt poſſible au moins en deux cas, ſavoir quand $\varphi u = \varphi g$, & quand $\varphi u = uu$. On pourroit auſſi réſoudre le Problême par le calcul, mais il eſt ſi long & ſi compliqué, que nous avons cru le devoir ſupprimer.

Corollaire.

346. Si la réſiſtance du Fluide & la peſanteur agiſſent l'une & l'autre ſuivant la même ligne CA (Fig. 118.) perpendiculaire au côté HB, la courbe eſt aiſée à conſtruire, quelle que ſoit la Loi de la réſiſtance. Car le centre C décriroit alors dans le Fluide en repos une ligne droite, à chaque point de laquelle on peut déterminer aiſément ſa vîteſſe. Donc &c.

Scolie.

347. Si dans un milieu compoſé de couches parallèles de différentes denſités, & qui ſe meuvent toutes uni-

formément ſuivant CP, (Fig. 123.) un parallélogramme rectangle $BFGH$ eſt ſitué de maniere, que l'une de ſes diagonales FH ſoit parallèle aux tranches du Fluide; & qu'on lui imprime une vîteſſe CE, telle, qu'en joignant PE, cette ligne PE ſoit parallèle à la diagonale GB, il ſera facile de trouver la courbe décrite par le centre C. Car toute la difficulté ſe réduit à trouver la vîteſſe que le centre C auroit aux différens points de la ligne CB qu'il décriroit (*art.* 337.) dans le Fluide en repos.

PROBLÊME III.

348. *Trouver la courbe que décrit un Cercle ſans peſanteur, pouſſé ſuivant une direction quelconque dans un Fluide qui ſe meut d'une vîteſſe uniforme.*

PREMIERE SOLUTION.

La ſolution de ce Problême eſt ſemblable à celle du Problême I. (*art.* 338.) & eſt même encore plus facile.

II. SOLUTION.

Si on veut réſoudre ce Problême par le calcul, on ſuppoſera que CF (Fig. 124.) ſoit la direction du Cercle, CP celle du Fluide. Ayant achevé le parallélogramme $CPMO$, la vîteſſe reſpective & la direction du Fluide contre le Cercle ſera OC. Menant donc RCS perpendiculaire à OC, il eſt clair que le demi-Cercle entier SAS ſera expoſé à l'action du Fluide : d'où il s'enſuit que CY ſera la direction de la réſiſtance. A l'égard de la valeur de

cette réſiſtance, on ſait qu'elle eſt les $\frac{2}{3}$ de celle que ſeroit le Fluide au diametre RCS, s'il venoit le frapper perpendiculairement avec la vîteſſe OC. Donc appellant f l'effort que feroit le Fluide contre le diametre RCS, s'il venoit le frapper perpendiculairement avec une vîteſſe donnée g, on aura $\frac{2f\phi(OC)}{3\phi g}$ pour la quantité de l'effort ſuivant CY.

Soit à préſent $CA=a$, $AE=z$, CA étant perpendiculaire à CP. Si on mene de plus BCb perpendiculaire à CE, & du point P la ligne PG perpendiculaire à CM, & qu'on appelle e la vîteſſe du Fluide, & u celle du Cercle, on aura $PG=\frac{ea}{\sqrt{[aa+zz]}}$, $MG=u-\frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}}$, PM ou OC que j'appellerai $V=\sqrt{[\frac{eeaa}{aa+zz}+(u-\frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}})^2]}$, l'effort ſuivant $CY=\frac{2}{3}.\frac{f\phi V}{\phi g}$; l'effort qui en réſulte ſuivant CT dans la direction de $CE=\frac{2f\phi V}{3\phi g.V}\times(u-\frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}})$; & l'effort qui en réſulte ſuivant CZ perpendiculaire à $CE=\frac{2f\phi V}{3\phi g.V}\times\frac{ea}{\sqrt{[aa+zz]}}$.

On aura donc les deux Equations

$$\frac{2f\phi V.ea\times dx^2.(aa+zz)}{3V\phi g.\sqrt{[aa+zz]}.aauu}=\frac{mdxdz}{\sqrt{[aa+zz]}}\ldots\ldots\ldots(6),$$

$$\&\ \frac{2f\phi V}{3V\phi g}\times(u-\frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}})\times\frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{a}=-mudu..(7),$$

d'où l'on tire

$\frac{-du}{uu}\sqrt{[aa+zz]}+\frac{zdz}{u\sqrt{[aa+zz]}}=\frac{dz}{e}$, dont l'intégrale est $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}-\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g}=\frac{z-h}{e}$; donc V est égal à $\sqrt{[aa+(\frac{e\sqrt{[aa+hh]}}{g}-h)^2:(\frac{z-h}{e}+\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g})}$. Mettant ces valeurs de u & de V dans l'Equation (6), on aura $\frac{2fdx}{3m\varphi g}\times\varphi(\sqrt{[aa+(\frac{e\sqrt{[aa+hh]}}{g}-h)^2]}:[\frac{z-h}{e}+\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g}])=\frac{adz}{e}\times\sqrt{[aa+(\frac{e\sqrt{[aa+hh]}}{g}-h)^2]}:(\frac{z-h}{e}+\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g})^3$.. (8), d'où l'on voit que la conſtruction de la courbe eſt poſſible.

COROLLAIRE I.

349. Si on ſuppoſe la réſiſtance proportionnelle à une puiſſance quelconque n de la vîteſſe, & qu'on faſſe pour abréger $\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g}-\frac{h}{e}=\frac{\alpha}{e}$, & $aa+\alpha\alpha=\mathfrak{GG}$, l'Equation générale (8) aura pour intégrale..... $\frac{2fx\mathfrak{G}^{n-1}}{3mg^n}=\frac{a}{n-2}[(\frac{z-\alpha}{e})^{n-2}-(\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g})^{n-2}]$; donc z ou $\frac{ady}{dx}=\varepsilon[(n-2).\frac{2fx\mathfrak{G}^{n-1}}{3mag^n}+(\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g})^{n-2}]^{\frac{1}{n-2}}+\alpha$. D'où l'on voit 1°. que *la courbe eſt toujours Géométrique, excepté dans le cas de* $n=1$; 2°. qu'en particulier *elle eſt une parabole, ſi* $n=3$, *& une Logarithmique, ſi* $n=1$.

Il eſt viſible auſſi, que ce qui a été dit (*art.* 339.) s'applique encore ici, & ſe tire de même de la premiere ſolution.

COROL. II.

350. Si on ſuppoſe que la vîteſſe e ſoit différente dans les différentes couches du Fluide, & que le Cercle ſoit très-petit, ou au moins tel que la vîteſſe du Fluide puiſſe être regardée comme conſtante dans un eſpace égal au diametre du Cercle, on aura comme ci-deſſus (*art.* 348, *ſeconde Solution.*).....

$\frac{-du\sqrt{[aa+zz]}}{uu}+\frac{zdz}{u\sqrt{[aa+zz]}}=\frac{dz}{e}$, dont l'intégrale ($e$ étant regardée comme variable) eſt

$$\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}=\int\frac{dz}{e},$$

en imaginant que $\int\frac{dz}{e}$ devienne $\frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g}$ lorſque $x=0$.

Suppoſons préſentement que la réſiſtance ſoit proportionnelle à la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que $\varphi V=V$, on aura

$$\frac{2fdx}{3mg}\times\left(\int\frac{dz}{e}\right)^2=\frac{adz}{e},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{2fx}{3mag}=\frac{g}{\sqrt{[aa+hh]}}-\frac{1}{\int\frac{dz}{e}};$$

$$\text{donc } dz=\frac{2fedx}{3mag\left(\frac{g}{\sqrt{(aa+hh)}}-\frac{2fx}{3mag}\right)^2}.$$

Or comme e ne peut être qu'une fonction de x, il s'enſuit que *la courbe eſt conſtructible lorſque* $\varphi V=V$.

Il eſt à remarquer qu'on ne peut ſe ſervir ici du Prin-

cipe de la premiere Solution (*article* 348.) parce qu'en général ce Principe n'eſt d'uſage que quand la vîteſſe du Fluide eſt uniforme.

En général, ſoit $\varphi V = \alpha V^n + \mathfrak{C} V^m$; ſi l'on met pour $\frac{V[aa+zz]}{u}$ ſa valeur $\int \frac{dz}{e}$ dans l'Equation (6) de l'*article* 348, & qu'on faſſe

$$z - e\int \frac{dz}{e} = t, \text{ on aura}$$

$$d\left(\frac{dt}{de}\right)\left[\frac{dt}{de}\right]^{n-3} = \frac{2fdx}{3a(\alpha g^n + \mathfrak{C} g^m)} \times$$

$$\left(\alpha[aa+tt]^{\frac{n-1}{2}} + \mathfrak{C}[aa+tt]^{\frac{m-1}{2}}\right)\left(\frac{dt}{de}\right)^{n-m} \quad \ldots\ldots (9).$$

Cela poſé, ſoit 1°. $e = \gamma + x$, on aura $de = dx$; & faiſant $dx = p\,dt$, on trouve que les indéterminées ſont ſéparables dans l'Equation (9) précédente, généralement lorſque $\mathfrak{C} = 0$, & de plus lorſque $m = 1$, α & $\mathfrak{C}$ étant deux conſtantes quelconques.

2°. Soit $e = \gamma + \delta c^{\pm x}$, on trouve encore que l'Equation précédente (9) eſt conſtructible lorſque $\mathfrak{C} = 0$, & $n = 2$.

Corol. III.

351. Si la denſité du Fluide eſt variable & que le Cercle ſoit très-petit, ou au moins tel que la denſité puiſſe être regardée comme conſtante dans un eſpace égal au diametre du Cercle, on pourra conſtruire la courbe dans toutes les hypothèſes poſſibles de réſiſtance, en ſe ſervant de l'une ou l'autre des deux Méthodes de l'*article* 348, & regardant ſeulement la réſiſtance f, non plus comme

conſtante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x.

Enfin, ſi la vîteſſe & la denſité ſont ſuppoſées variables l'une & l'autre, on pourra encore conſtruire la courbe, au moins dans le cas où $\varphi V = V$, comme on a déja fait (*article* 350.) pour le cas de la vîteſſe variable, & de la denſité conſtante.

Si $e = \gamma + X$ & $f = \frac{a\,dX}{dx}$, X étant une fonction de x, on pourra conſtruire la courbe lorſque $\zeta = 0$, & de plus lorſque $m = 1$. On peut encore la conſtruire lorſque $\zeta = 0$, $n = 2$ & $e = \gamma + \delta c \pm \int f\,dx$.

Remarque I.

352. Si la figure donnée, au lieu d'être un Cercle, étoit une Sphere, les Problêmes précédens ne ſeroient pas plus difficiles à réſoudre; tout dépend d'une détermination exacte de la direction & de la quantité de la réſiſtance. Pour cela on fera paſſer le Cercle CAB (Fig. 125.) par les lignes CE & CP, & après avoir fait une conſtruction ſemblable à celle de l'*article* 348, (*ſeconde Solution*) on verra que le diametre VCF eſt la ligne ſuivant laquelle ſe fait la direction de la réſiſtance. Car ayant imaginé un autre demi-Cercle quelconque VSF, & par un de ſes points c pris à volonté, ayant tiré cp égale & parallèle à CP, cm égale & parallèle à CM, il eſt clair que co ſera égale & parallèle à CO & dans le plan du demi-Cercle VSF. Donc co eſt parallèle à la tangente qui paſſeroit par le point de milieu S du demi-Cercle VSF. D'où il

il s'enſuit que la demi-Sphere *SFR* eſt expoſée à l'action du Fluide. Donc *CV* ſera, comme dans le cas du Cercle, la direction de la réſiſtance.

Le reſte du calcul ſera le même que pour le Cercle, à quelques coefficiens près.

Remarque II.

353. Lorſque la vîteſſe du Fluide eſt ſuppoſée variable, il y a une remarque importante à faire ſur la maniere dont on détermine la direction de la réſiſtance. Comme l'on ſuppoſe le Cercle très-petit, on prend cette direction pour la même qu'elle ſeroit, ſi la vîteſſe du Fluide étoit uniforme dans un eſpace égal au diametre du Cercle, & qu'elle fût égale à la vîteſſe du filet, dont la direction paſſe par le centre du Cercle. Cette ſuppoſition eſt fort éloignée de la vérité, lorſque la vîteſſe & la direction du Cercle eſt à peu près la même que celle du Fluide. Car ſoient *AB*, *ac* (Figure 126.) les vîteſſes du Fluide en *A*, *a*, & que les lignes égales & parallèles *AD*, *ad*, repréſentent la direction du centre *C*, l'angle *BAD* étant très-petit; il eſt clair que *DB*, *dc* ſont les directions avec leſquelles les points *A*, *a*, ſont cenſés frappés par le Fluide. Or quoique la différence de *AB* & de *ac* ſoit infiniment petite, cependant comme elle n'eſt pas infiniment petite par rapport à *BD* ou *dc*, les lignes *DB*, *dc* ne peuvent être regardées comme parallèles.

Cette obſervation n'empêche pas cependant que la ſolution du Corol. II. (*article* 350.) ne puiſſe paſſer pour

exacte. Car lorſque la viteſſe & la direction du Cercle ſont à peu près les mêmes que la viteſſe & la direction du Fluide, le Cercle ne décrit plus de courbe ſenſible.

PROBLÊME IV.

354. *Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art. 348, *avec cette condition de plus, que le Cercle ſoit peſant, & que la peſanteur agiſſe dans le plan du Cercle, on demande la courbe qu'il doit décrire.*

PREMIERE SOLUTION.

En appliquant ici les Principes expliqués & démontrés ci-deſſus, on voit qu'il n'eſt queſtion que de trouver la trajectoire décrite par un Corps peſant dans un Fluide en repos. Ce Problême a été réſolu par Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, *Euler* &c. * & nous en donnerons auſſi plus bas une Solution fort ſimple.

II SOLUTION.

Comme la peſanteur doit ſe combiner ici avec la réſiſtance du Fluide, ſi on retranche la quantité $\frac{p\zeta dx^2}{V[aa+\zeta\zeta]} \times \frac{aa+\zeta\zeta}{aauu}$ du premier membre de l'Equation (6) (*art.* 348.) & la quantité pdx du premier membre de l'Equation (7), on aura deux nouvelles Equations que j'appellerai (10) & (11) par le moyen deſquelles on réſoudra le Problême de la maniere ſuivante. On comparera d'abord les deux

* *Act. Erud.* 1719. Euler *Mechan.*

valeurs de $\frac{2fdx\varphi V}{3\varphi g}$ tirées de ces deux Equations, ce qui donnera, en ſuppoſant $\frac{V[aa+zz]}{u}=q$,

$$dx=maa.\frac{dz-edq}{q(peqq-pzq)}.$$

Comparant cette valeur de dx avec celle qu'on tire de l'Equation (10), on aura

$$\frac{2fea\varphi V}{3V\varphi g}\times(dz-edq)=peqdz-pzedq.\ldots\ldots(12).$$

Cette Equation eſt aiſément ſéparable, ſi $\varphi V=V$. En général, ſi on ſe rappelle que $V=\frac{V[aa+(z-eq)^2]}{q}$, & qu'on faſſe $z-eq=t$, on trouvera

$$\frac{2fa\varphi V}{3p\varphi g}\cdot\frac{Vdt}{aa+tt}=d\left(\frac{Vt}{V[aa+tt]}\right),$$

d'où l'on voit que non-ſeulement $\varphi V=V^n$; mais encore $\varphi V=V^n+A$, & $\varphi V=\log.V$, donne une conſtruction poſſible.

REMARQUE I.

355. Je n'ai donné la ſeconde Solution qui précéde, que parce qu'elle renferme comme un cas particulier le Problême des trajectoires dans les milieux réſiſtans, & que de plus par la Méthode dont je me ſuis ſervi, on voit que le Problême peut ſe réſoudre encore dans des cas dont Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, *Euler*, n'ont pas fait mention. Nous obſerverons cependant que la ſolution précédente ſemble d'abord ne pouvoir s'appliquer au cas

où le Fluide eſt en repos. Car e étant alors $= 0$, l'Equation (12) devient identique, & ne peut conduire à rien.

Mais ſi on compare la valeur de $dx = -\frac{maadz}{pzqq}$ avec ſa valeur tirée de l'Equation (11), on aura en mettant pour q ſa valeur $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}$,

$$\frac{2f\phi u.audz}{3p\Phi g.(aa+zz)} = d\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right).$$

REMARQUE II.

Sur les cas où on peut conſtruire les trajectoires dans les milieux réſiſtans.

356. L'Equation $\frac{2f\phi u.audz}{3p\Phi g.(aa+zz)} = d\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right)$ eſt évidemment conſtructible non-ſeulement lorſque $\phi u = u^n$, ce qui eſt le ſeul cas qu'on ait examiné juſqu'à préſent, mais encore lorſque $\phi u = u^n + A$, & lorſque $\phi u = A + f\,\mathrm{Log.}\,u$, A & f exprimant des nombres quelconques.

Il y a encore quelques autres cas où cette Equation peut ſe conſtruire. Comme le détail de ces cas peut intéreſſer les Géometres, je vais expoſer la maniere de les trouver.

Je remarque d'abord que $\frac{adz}{aa+zz}$ eſt l'élément d'un angle dont a eſt le rayon & z la tangente, & que $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}}$ eſt le Sinus de ce même angle. De-là il eſt aiſé de conclure, qu'en ſuppoſant $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}} = \sqrt{[1-xx]}$, on fera

évanouir les radicaux de l'Equation différentielle proposée ; on aura donc, en négligeant ou supprimant les coefficiens constans, $u\varphi u\,dx = du - xx\,du - xu\,dx$. Il s'agit de déterminer φu à être telle que cette Equation puisse être séparée.

Soit en premier lieu $\varphi u = \frac{auu+Ru+b}{u}$, & prenons $u = k + fx^p + mx^n z$, k, f, p, m, n, étant des constantes inconnues ; nous aurons la transformée suivante

$$\left.\begin{array}{lll} akk\,dx & +2akfx^p dx & +affx^{2p}dx \\ +kR\,dx & +fRx^p dx & -pfx^{p-1}dx \\ +b\,dx & +kx\,dx & +pfx^{p+1}dx \\ & & +fx^{p+1}dx \end{array}\right\} = Xz\,dx + Xz^2\,dx + \xi\,dx.$$

dans laquelle X, X, ξ, marquent des fonctions de x. Or il est clair que cette Equation pourra être construite, si on peut déterminer les coefficiens k, f, p, à être tels que le premier membre de l'égalité soit zero. C'est à quoi on parviendra en supposant $p = 1$, $akk + kR + b - pf = 0$, $2akf + fR + k = 0$, $aff + pf + f = 0$. Mais comme des trois inconnues k, fp, l'une $p = 1$ est donnée (*hyp.*) & qu'on a outre cela trois Equations pour déterminer les deux autres ; il s'ensuit que l'Equation proposée n'est intégrable ou constructible lorsque $\varphi u = \frac{auu+Ru+b}{u}$, que quand il y a, outre cela, entre les coefficiens a, R, b, un certain rapport.

Par exemple, si $R = 0$, on trouve que b doit être $= -\frac{2}{a}$, & l'on aura $k = 0, f = b$.

En général, soit $\varphi u = au^p + R + bu^{-p}$, & l'on aura $(au^{2p} + Ru^p + b).dx = u^{p-1}du - xxu^{p-1}du - u^p xdx$. Equation qui est préciſément de la même forme, que celle que nous venons d'examiner dans le cas où $\varphi u = \frac{auu+Ru+b}{u}$. Donc lorſque $\varphi u = au^p + R + bu^{-p}$, l'Equation peut encore ſe conſtruire s'il y a entre les coefficiens a, R, b, certaines conditions, p étant d'ailleurs un nombre quelconque.

Je ſuppoſe à préſent que l'Equation $u\varphi u dx = du - xxdu - uxdx$ ait été diviſée par u, & que φu ſoit égal à $a(\text{Log.}\,u)^2 + R.\,\text{Log.}\,u + b$; en prenant $\text{Log.}\,u = v$, j'ai $(avv + Rv + b).dx = dv - xxdv - xdx$, qui ne differe de l'Equation que nous venons d'examiner, que par le dernier terme. En faiſant les mêmes transformations & les mêmes raiſonnemens, on verra que le terme $fx^{p+1}dx$ s'effacera dans la transformée, & qu'on aura $+xdx$ au lieu de $xkdx$, & l'on trouve encore que l'Equation eſt conſtructible, ſi $p = 1, akk + kR + b - pf = 0, 2akf + fR + 1 = 0, aff + pf = 0$.

Nous trouvons donc par notre Méthode, que la trajectoire dans un milieu réſiſtant eſt toujours conſtructible, 1°. lorſque $\varphi u = u^n$; 2°. lorſque $\varphi u = A + u^n$; 3°. lorſque $\varphi u = A + f\,\text{Log.}\,u$, A, f, & n étant des nombres quelconques; 4°. lorſque $\varphi u = au^p + R + bu^{-p}$; 5°. lorſque $\varphi u = a(Lu)^2 + R.Lu + b$, pourvû qu'en ces deux derniers cas il y ait un certain rapport entre les coefficiens a, R, b.

Je ne prétends pas, au reſte, qu'il n'y ait que ces ſeuls cas où la trajectoire ſoit conſtructible, mais je laiſſe à ceux que ces ſortes de calculs peuvent intéreſſer, à pouſſer plus loin leurs recherches là-deſſus.

REMARQUE III.

Où l'on donne une Méthode fort ſimple pour trouver les trajectoires dans les milieux réſiſtans.

257. Soit AP (Fig. 127.) $= x$, $PM = y$, $MN = ds$, $dy = \frac{z\,dx}{a}$: la partie de la peſanteur qui agit ſuivant MN eſt $\frac{pa}{\sqrt{[aa+zz]}}$, dont il faut retrancher $f\varphi u$, & la force qui agit ſuivant NO eſt $\frac{pz}{\sqrt{[aa+zz]}}$: ces deux forces ſont entr'elles comme les eſpaces qu'elles font parcourir. Or l'eſpace que fait parcourir la premiere, eſt $\frac{ds\,du}{u}$, & l'eſpace que fait parcourir la ſeconde, eſt $NO = -\frac{ads\,dz}{aa+zz}$; on a donc

$$\frac{pz}{\sqrt{[aa+zz]}} : \frac{pa}{\sqrt{[aa+zz]}} - f\varphi u :: \frac{-adz}{(aa+zz)} : \frac{du}{u}$$; d'où l'on tire $pd\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right) = \frac{afu\varphi u\,dz}{aa+zz}$.

REMARQUE IV.

358. Les deux Méthodes que nous avons données dans l'*article* 354, s'appliquent auſſi au cas où la figure donnée eſt une Sphere au lieu d'être un Cercle. Si la

direction de la Sphere & du Fluide ne ſont pas dans le même plan vertical dans lequel la peſanteur agit, alors, comme les calculs ſeroient trop longs par la ſeconde Méthode, on ne ſe ſervira que de la premiere.

REMARQUE V.

359. Si un Cercle ou une Sphere, peſans ou non, paſſent du vuide dans un Fluide mû uniformément, ou d'un Fluide mû uniformément dans un autre Fluide, mû uniformément avec la même vîteſſe & la même direction que le premier; il ne s'agit, pour trouver la courbe qu'ils doivent décrire, que de ſavoir trouver cette courbe, lorſque chacun des Fluides eſt en repos. Or c'eſt de quoi nous avons traité fort au long ci-deſſus.

Si les deux Fluides étoient mûs chacun uniformément, mais avec différentes vîteſſes, dans ce cas voici comment il faudroit s'y prendre.

Que la ligne CE (Fig. 128.) repréſente la vîteſſe & la direction du centre C, CP la vîteſſe de l'un des Fluides, CF celle de l'autre; il eſt évident que EP, EF ſeront les directions ſuivant leſquelles chacun des Fluides fera impreſſion ſur le Cercle. Or ſi l'action d'un des Fluides ſuivant EP faiſoit décrire au centre C la petite ligne Ea, & que l'action de l'autre Fluide ſuivant EF fît décrire au centre C la ligne Eb, on verroit, après avoir achevé le petit parallélogramme $Ea\,db$, que Cd ſeroit la ligne décrite par le centre C, & ainſi du reſte. Donc ſi on ſuppoſe que le Fluide dont la vîteſſe eſt CP ſoit en repos,

que

que *PE* ſoit la direction & la vîteſſe initiale du centre *C*, *PF* la vîteſſe de l'autre Fluide, il n'y a qu'à chercher la courbe que décriroit dans ce cas le centre *C*, & faire enſuite mouvoir uniformément cette courbe avec une vîteſſe égale à *CP*. On aura par ce moyen la trajectoire cherchée.

Ou bien on peut ſuppoſer que la direction & la vîteſſe initiale du centre *C* ſoient *EF*, que le Fluide dont *CF* marquoit la vîteſſe ſoit en repos, & que l'autre ſe meuve ſuivant *FP*, & après avoir trouvé la courbe que le centre *C* décriroit dans ce cas, faire mouvoir enſuite uniformément cette courbe avec une vîteſſe égale à *CF*; on auroit encore par ce moyen la trajectoire qu'on cherche.

Ainſi de ces trois courbes; ſavoir, la courbe cherchée *CO*, (Fig. 129.) la trajectoire *CB* que le centre *C* décriroit dans le cas où *PE* ſeroit ſa direction & ſa vîteſſe initiale, & la trajectoire *CQ* qu'il décriroit, ſi *FE* étoit ſa direction & ſa vîteſſe initiale, de ces trois courbes, dis-je, l'une étant donnée à volonté, on peut toujours trouver les deux autres. On peut remarquer de plus, que ſi on mene une ligne quelconque *OBQ* parallèle à *CF*, *OB* ſera toujours à *OQ* :: *CP*. *CF*; d'où on peut conclure en paſſant, que les tangentes aux points *O*, *B*, *Q*, aboutiroient toutes trois au même point.

Pour trouver l'Equation des courbes *CB*, *CQ*, on peut ſe ſervir d'une Méthode ſemblable à celle que j'ai donnée dans le Chapitre précédent, où j'ai traité de la Réfraction.

Soit EaM (Fig. 130.) l'Arc enfoncé dans un inſtant quelconque, CA la direction du centre C, $CR = e$, la vîteſſe qui reſte à l'un des Fluides, par exemple, au Fluide ſupérieur, RQ parallèle à CA & égale à la viteſſe du centre C que je nomme u, f la réſiſtance que feroit le Fluide inférieur à la ligne Ca, ſi ce Fluide la frappoit perpendiculairement avec une vîteſſe donnée g, f la réfraction du Fluide ſupérieur dans les mêmes circonſtances; ſi on mene les lignes BCb, Ee, MF perpendiculaires à CA, & $\beta C\zeta$, Ee, Mf perpendiculaires à Ca, on aura $\frac{f\Phi u}{\Phi g} \times \frac{CF^3 - Ce^3}{3CA^3}$ pour l'expreſſion de l'effort ſuivant Cb, & $\frac{f\Phi(CQ)}{\Phi g} \times \frac{Cf^3 - Ce^3}{3CA^3}$ pour celle de l'effort ſuivant $C\beta$. On trouvera avec la même facilité les efforts ſuivant CN & Ca, & réduiſant enſuite par la décompoſition ces quatre efforts à deux, l'un ſuivant CN, l'autre ſuivant Cb ou CB, on parviendra aiſément à deux Equations, dont les trois inconnues ſeront les coordonnées & la viteſſe à chaque point de la courbe; faiſant évanouir l'inconnue u qui exprime la vîteſſe, on aura l'Equation de la courbe, mais à la vérité fort compliquée de différentielles.

Au reſte, nous avons ici une choſe aſſez ſinguliere à remarquer. On a vu dans le Chapitre ſur la réfraction, que la courbe décrite par le centre C durant l'enfoncement du Cercle, étoit réellement compoſée de deux courbes différentes, à Equations différentes, dont le centre C décrivoit la premiere, tant que le point E, l'une des

extrémités de l'Arc enfoncé EaM, étoit ſur le quart de Cercle AB. Ici nous voyons que le centre C peut en décrire juſqu'à quatre & même cinq. La premiere, lorſque le point E eſt à-la-fois ſur les quarts de Cercle AB, $a\mathcal{B}$; la ſeconde, lorſqu'il n'eſt plus que ſur le quart de Cercle AB; la troiſiéme, lorſqu'il n'eſt plus ni ſur l'un, ni ſur l'autre, & tant que le point M n'a pas atteint le point b. La quatriéme enfin, pendant le tems que le point M met à parcourir l'Arc $b\mathcal{C}$. Après quoi le centre C ne fait plus que ſe mouvoir en ligne droite, à moins qu'on ne ſuppoſe que le Fluide inférieur ſoit en mouvement, auquel cas il décrira une cinquiéme ligne courbe différente des quatre premieres.

Dans le cas où les deux Fluides ont une égale vîteſſe, ſi l'angle CPE (Figure 128.) eſt droit, les trajectoires CB, CQ, (Fig. 129.) qui ſe confondent alors, deviennent des lignes droites. Ainſi pour conſtruire la courbe CQS, il n'eſt queſtion que de ſavoir trouver la vîteſſe du centre C aux différens points de ces lignes.

Remarque VI.

360. Il eſt preſqu'inutile d'avertir que par les Méthodes expliquées dans ce Chapitre, il eſt facile d'avoir l'Equation de la courbe que décriroit un Navire de figure rectangle ou circulaire, pouſſé par le vent ſuivant une direction quelconque dans un Fluide qui ſe mût auſſi ſuivant telle direction qu'on voudroit. La difficulté ne peut être que dans le calcul. Nous remarquerons, au reſte,

qu'on peut rarement réduire ce Problême à celui d'un Navire pouſſé par le vent dans un Fluide en repos.

Soit par exemple *CSK* (Figure 131.) un Navire de figure circulaire, *CD* ſa direction & ſa vîteſſe initiale, *CP* la direction & la vîteſſe du Fluide. Si on joint *PD* & qu'on mene *CG* égale & parallèle à *PD*, *CG* ſera la vîteſſe & la direction qu'on devroit donner au Navire dans le Fluide en repos. Soit la voile *NCS* perpendiculaire à *CG*, *CF* la viteſſe abſolue du vent, il eſt évident que *DF* exprimera la viteſſe reſpective du vent par rapport au vaiſſeau, & *FH* ſon action ſur la voile, lorſque le vaiſſeau eſt mû ſuivant *CD*; au lieu que ſi le vaiſſeau étoit mû ſuivant *CG*, l'action du vent ſur la voile ſeroit exprimée par *FG*. Donc &c.

Si l'angle *CPD* étoit droit, alors *FH* ſeroit = *FG*, & le Problême ſe réduiroit au cas du Fluide en repos.

§. IV.

Du mouvement d'une figure quelconque dans un Fluide.

PROBLÊME I.

361. *On ſuppoſe qu'à tous les points* P, Q, R, &c. (Fig. 132.) *d'une figure quelconque* PQRO, *ſoient appliquées des puiſſances dont les valeurs & les directions* PS, QT, RF, &c. *ſoient données; on demande la force ou puiſſance unique qui réſulte de toutes celles là.*

On décompoſera chacune des puiſſances en deux autres, dont l'une ſoit parallèle à une ligne *AB* donnée de

position, & l'autre soit parallèle à une autre ligne AC aussi donnée de position. On cherchera la force résultante du concours d'action des puissances parallèles à AB, ce qui se peut trouver très-aisément par les Principes de Statique; on cherchera de même la force résultante du concours d'action des puissances parallèles à AC; & la force résultante du concours de ces deux nouvelles forces, sera la force qu'on cherche.

Ce Problême a déja été résolu par M. *Bernoulli* dans sa *Manœuvre des vaisseaux.*

Problême II.

362. *Les mêmes choses étant posées que dans l'*art. 360, *trouver le mouvement que la figure doit prendre.*

Puisque (*Probl. précéd.*) toutes les puissances ont été réduites à une seule, dont je suppose que la direction soit AQ, (Figure 133.) il s'ensuit que le mouvement de la figure doit être le même, que si elle étoit poussée en A par une puissance donnée suivant une direction AQ. Or il est clair par les *art.* 64 & 138 du *Traité de Dynamique*, 1re Edition, & par les *art.* 76 & 159 *du même Traité*, 2e Edition, que le centre de gravité G de la figure doit se mouvoir suivant GO parallèle à AQ avec une vîtesse u telle, que $QRASQ \times u$ soit = à la puissance appliquée en A; que de plus, la figure doit en même-tems tourner autour de son centre G, de maniere qu'en menant la perpendiculaire GT à AQ, & nommant ω la vîtesse du point T pour tourner autour de G, A la puissance ap-

pliquée en A, p la ſomme des produits des parties de la figure par le quarré de leurs diſtances à G, l'on ait $A.GT = \frac{\alpha p}{GT}$: ce qui donnera l'inconnue α.

PROBLÊME III.

363. *Trouver les Loix du mouvement d'une figure quelconque* STMV, (Fig. 134.) *qui ſe meut dans un Fluide d'une denſité conſtante ou variable, & dont les différentes particules ſe meuvent auſſi avec une vîteſſe uniforme ou variable.*

1°. Il eſt certain que ſi on nomme u la vîteſſe du centre de gravité en un inſtant quelconque, α la vîteſſe avec laquelle un point donné de la figure tourne dans ce même inſtant autour du centre de gravité, on aura facilement la vîteſſe abſolue d'un point quelconque M de la figure, puiſque cette vîteſſe eſt compoſée d'une vîteſſe égale & parallèle à celle du centre G, & de la vîteſſe de rotation du point M autour du centre G, qui eſt connue facilement par la vîteſſe α.

2°. Soit donc MQ la vîteſſe abſolue d'un point quelconque M de la figure, MN la vîteſſe du point du Fluide qui répond à M, on regardera la vîteſſe MN, comme compoſée de MQ & de MP, & il eſt évident qu'en appellant δ la denſité du Fluide en M, on trouvera que la force qui eſt appliquée perpendiculairement au point M de la figure, eſt $\frac{\delta . mr^2 . \phi(MP)}{Mm}$.

3°. Connoiſſant ainſi la valeur & la direction de chacune des forces appliquées aux points de la figure, on connoîtra la valeur & la direction de la force unique qui en réſulte à chaque inſtant. Ainſi ſuppoſant que dans un inſtant donné, AQ, (Fig. 133.) ſoit la direction de cette force & F ſa valeur; il eſt clair (*art.* 361.) qu'en nommant m la maſſe de la figure, dt l'inſtant propoſé & ſuppoſant que GO parallèle à AQ, ſoit le petit chemin du centre G en vertu de la force φ, on aura $Fdt^2 = m \cdot GO$, & que $\frac{F \cdot GT^2 \cdot dt^2}{p.}$ ſera le chemin que fera le point T autour du centre G.

Par-là on trouvera non-ſeulement la courbe que décrit le centre G, mais encore ſa vîteſſe aux différens points de cette courbe, & la vîteſſe avec laquelle il tourne autour de ſon centre. Le calcul ſera plus ou moins compliqué, ſelon que la figure ſera plus ou moins ſimple. Il ſuffit ici d'en donner, comme nous venons de faire, l'eſprit & la méthode.

REMARQUE I.

364. Outre l'effort que fait le Fluide perpendiculairement à la figure au point M, & dont nous venons de calculer l'effort, il agit encore, lorſque la circonférence de la figure n'eſt pas parfaitement Mathématique, par ſon effort ſuivant Mm. Pour calculer la valeur de cet effort, il faut obſerver, que $\frac{MP \cdot Mr}{Mm}$ eſt la vîteſſe du Fluide ſui-

vant mM; que $\frac{MQ.Mn}{Mm}$ eſt la vîteſſe du point M de la figure dans la direction mM, & enfin que $\frac{1}{2}.Mm \times (\frac{MP.Mr \pm MQ.Mn}{Mm})^2$ eſt la force appliquée en M. On aura de même la force appliquée à tous les autres points de la figure; & par les Méthodes expliquées dans les Problêmes précédens (*art*, 361, 362 & 363), on trouvera le nouveau Mouvement imprimé à la figure par la force qui réſulte du concours de celles-là.

Remarque II.

365. Il eſt évident que par les mêmes Principes on trouvera le mouvement d'une figure quelconque qui paſſe d'un Fluide dans un autre. Comme les calculs en ſont extrêmement compliqués, & que j'ai réduit la queſtion à une pure queſtion d'Analyſe, par les Principes que je viens d'expoſer dans la ſolution des Problêmes précédens, je crois qu'il eſt inutile de m'étendre ſur ce ſujet. On voit ſeulement que la ſolution eſt beaucoup plus compoſée & dépend d'un nombre beaucoup plus grand d'élémens, qu'on ne paroît l'avoir cru juſqu'à préſent: on voit auſſi combien on doit être réſervé à avancer ſur la réfraction des Corps ſolides des propoſitions générales, par exemple, celle-ci, *qu'un Corps s'approche toujours de la perpendiculaire quand le milieu où il entre réſiſte moins que le premier & au contraire :* on ſent aſſez qu'il faudroit avoir fait, pour ainſi dire, l'énumération de toutes les

les figures poſſibles, pour avancer en général cette propoſition. Il eſt même aiſé de faire voir dans un exemple particulier, que cette propoſition eſt fauſſe. Car nous avons vû ci-deſſus (*article* 311.) qu'un parallélogramme qui ſe meut dans un ſeul & même Fluide, décrit dans ce Fluide une courbe ſouvent concave vers la perpendiculaire. Or qu'on ſuppoſe que ce parallélogramme paſſe du Fluide où il ſe meut, dans un autre qui en differe infiniment peu, mais qui pourtant réſiſte davantage; la courbe qu'il décrira ne changera qu'infiniment peu de nature, & ne ceſſera point par conſéquent d'être concave vers la perpendiculaire.

Au reſte, on trouvera dans le Ve Tome *de nos Opuſcules, page* 161, de nouvelles recherches ſur la réfraction des Corps ſolides; elles ont principalement pour objet d'expliquer les ricochets qu'on forme ſur l'eau, avec des Corps à ſurface plane, lancés fort obliquement, & de faire voir comment on peut expliquer ces ricochets par la ſeule réſiſtance de l'eau; nous renvoyons le Lecteur à ces recherches.

Remarque III.

366. L'Illuſtre *Barrow*, dans ſes *Leçons Optiques*, Lec. 1, a donné d'après le P. *Maignan*, Minime, une explication de la réfraction de la lumiere, qui eſt aſſez ingénieuſe, mais dont on apperçoit bientôt le défaut, pour peu qu'on faſſe uſage de tout ce que nous avons dit ci-deſſus.

Son explication conſiſte à regarder un rayon de lu-

miere comme un parallélogramme rectangle oblong & ſolide, tel que *ABCD* (Fig. 135.) qui vient frapper la ſurface *EF* ſuivant la direction *AC*; d'où il s'enſuit que le point *C* arrivant à la ſurface *EF* avant le point *D*, ſon mouvement eſt plus retardé que celui du point *D*, & cela dans la raiſon de la réſiſtance des deux milieux: ſelon M. *Barrow*, les points *C*, *D* décrivent deux Arcs de Cercle *Cc*, *Dd* qui ſont entr'eux en raiſon donnée, & par conſéquent auſſi leurs rayons *DN*, *CN*: or de ce que les rayons *DN*, *CN* ſont en raiſon donnée; M. *Barrow* conclut, & fait voir que les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon donnée. Mais c'eſt gratuitement qu'il ſuppoſe ſans le démontrer, que les points *D*, *C*, décrivent des Arcs de Cercles qui ſont entr'eux dans la raiſon des denſités des réſiſtances, & que ces Arcs ſont touchés en *c*, *d*, par les côtés du parallélogramme.

§. V.

Obſervations ſur quelques Problêmes concernant les Fluides.

367. Le titre que j'ai donné à ce Chapitre, me permet d'inférer ici quelques Obſervations que je crois nouvelles, ſur différens Problêmes concernant l'impulſion des Fluides.

La premiere regarde les aubes ou palettes des moulins qui tournent autour d'un axe fixe, étant mues par l'eau. C'eſt un Problême qui ne me paroît pas avoir été bien réſolu juſqu'à préſent, que de trouver la force de l'impul-

sion de l'eau contre la partie AB (Fig. 136.) de la palette qui entre dans l'eau, & qui est mûe par l'eau de F vers K. La plûpart ont regardé la vîtesse des parties de AB comme si elle étoit la même par rapport à l'eau; ce qui est bien éloigné d'être véritable. Soit $CB = a$, u la vîtesse de B, $CG = x$, on aura la vîtesse de $G = \frac{ux}{a}$; & si g exprime la vîtesse de l'eau, & qu'on nomme BN, y, on aura pour l'impulsion de l'eau en G, $dx \times (\frac{gy}{a} - \frac{ux}{a})^2$, & $x\,dx.(\frac{gy}{a} - \frac{ux}{a})^2$ pour le moment de cet effort; qu'il faut intégrer pour avoir le moment total, en regardant x seulement comme variable. Mais il faut prendre garde à la maniere dont on intégrera ici.

Car lorsque $gy - ux$ est une quantité négative, l'intégrale de $x\,dx.\frac{(gy-ux)^2}{a^2}$ doit l'être aussi, comme il est évident, puisqu'alors l'impulsion est de K vers F au lieu d'être de F vers K. Cependant comme $(gy - ux)^2$ est toujours une quantité positive, l'intégrale seroit positive, si on la prenoit sans précaution, ce qui jetteroit dans l'erreur. Pour l'éviter, il faut prendre d'abord l'intégrale à l'ordinaire; & voir ce qu'elle devient quand $gy - ux = 0$. Soit P l'intégrale entiere, Q ce qu'elle devient, lorsque $gy - ux = 0$, & $P = Q + Q$. On doit donc au lieu de $Q + Q$ avoir $Q - Q$ pour la vraie intégrale; c'est-à-dire, (à cause de $Q = P - Q$) que la vraie intégrale sera $2Q - P$; d'où résulte la régle suivante. Prenez l'intégrale

entiere P à l'ordinaire, & ſoit Q ce qu'elle devient quand $gy = ux$; $2Q - P$ ſera l'intégrale véritable.

La force qui anime chaque particule G étant connue, il eſt aiſé de trouver l'accroiſſement de vîteſſe. C'eſt un Problême de la nature de celui des *centres d'oſcillation.* Voyez le *Traité de Dynamique*, II. Partie, Chapitre III. Probl. I.

368. La ſeconde remarque que j'ai à faire, eſt ſur la maniere dont on réſout ordinairement le Problême de la poſition la plus avantageuſe des aîles du moulin à vent à l'égard du vent. M. *Daniel Bernoulli* a déja remarqué dans ſon *Hydrodynamique*, que dans la ſolution de ce Problême on devroit avoir égard à la vîteſſe reſpective du vent par rapport au moulin, au lieu qu'on regarde d'ordinaire la vîteſſe du vent comme infinie; & il a fait voir qu'en ayant égard à la vîteſſe du moulin & la regardant comme donnée, le Problême eſt beaucoup plus compliqué, que dans l'hypothèſe où on le réſout ordinairement. J'ajouterai à ce qu'il a dit, que dans la ſolution de ce Problême, on ne peut pas regarder la vîteſſe du moulin comme donnée à volonté, ainſi que la vîteſſe du vent. Il y a une certaine vîteſſe à laquelle l'aîle doit arriver pour ſe mouvoir uniformément, & qui eſt telle, que quand elle a cette vîteſſe, la force du vent pour la mouvoir eſt zero. D'où il s'enſuit que la figure & la poſition de l'aîle étant donnée, ſa vîteſſe proprement dite, celle à laquelle elle doit arriver pour ſe mouvoir uniformément, eſt néceſſairement donnée: le Problême conſiſte donc à ſavoir quelle

eſt la figure & la poſition de l'aîle, pour que cette vîteſſe ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible.

Pour ne point m'engager en de trop longs calculs, je réſoudrai ce Problême pour le cas où l'aîle eſt un parallélogramme rectangle d'une largeur infiniment petite.

369. Soit AB (Fig. 137.) l'Axe du moulin, EDA l'angle que fait l'aîle avec l'Axe, BA la direction du vent, γ la vîteſſe d'un point de l'aîle éloigné du point D de la diſtance donnée a : ſoit $OD = b$ la vîteſſe du vent, la tangente de l'angle ODE (pour le Sinus total a) $= t$, on aura $OE = \frac{bt}{a}$. Soit OF la vîteſſe d'un point quelconque de l'aîle pour tourner autour de AB, on aura $OF = \frac{\gamma x}{a}$, x étant la diſtance de ce point à D. FD ſera la vîteſſe reſpective du vent, & ſa force ſur ce point de l'aîle ou ſur la petite ſurface qui y répond, ſera $FD^2 \times \frac{FK^2}{FD^2} = FK^2 = (\frac{bt}{a} - \frac{\gamma x}{a})^2 \times \frac{aa}{aa+tt}$, & le moment de l'impulſion ſera $x\,dx \times (\frac{bt-\gamma x}{a})^2 \times \frac{aa}{aa+tt}$: la vîteſſe γ doit être telle, que l'intégrale de cette quantité ſoit zero. Or en prenant les précautions que nous avons marquées ci-deſſus (*art.* 367.) dans le calcul de cette intégrale, on aura $(\frac{x^2 b^2 t^2}{2} - \frac{2bt\gamma x^3}{3} + \frac{\gamma\gamma x^4}{4}) \times \frac{1}{aa+tt}$ pour ſon expreſſion, qui lorſque $x = n$ que je ſuppoſe la longueur de l'aîle, devient $[\frac{n^2 b^2 t^2}{2} - \frac{2b\gamma tn^3}{3} + \frac{\gamma\gamma n^4}{4}] \times \frac{1}{aa+tt}$, & lorſque

$x = \frac{bt}{\gamma}$, elle devient $\frac{1}{aa+tt} \times \frac{b^4 t^4}{2 \cdot \gamma\gamma}$. D'où l'on tire $\frac{1}{6} \times \frac{b^4 t^4}{\gamma^2} - \frac{n^2 b^2 t^2}{2} + \frac{2b\gamma t n^3}{3} - \frac{\gamma\gamma n^4}{4} = 0$. C'eſt l'Equation d'où il faut tirer la valeur de γ.

Il y a dans cette Equation trois inconnues γ, n, t, dont deux quelconques étant données, on a la troiſiéme, & cette Equation peut être regardée comme appartenant à une ſurface courbe, dans laquelle il faut déterminer la valeur de n & de t, afin que γ ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Pour cela il faut remarquer, que la tangente en ce point de la ſurface courbe eſt parallèle à la baſe, qu'ainſi la ligne γ eſt à-la-fois une plus grande Ordonnée dans la courbe qui a γ & n pour Coordonnées, & dans celle qui a pour Coordonnées γ & t; c'eſt pourquoi il faut différencier d'abord l'Equation précédente, en regardant γ & n ſeulement comme variables, puis la différencier de nouveau en regardant ſeulement γ & t comme variables, & faire dans l'une & dans l'autre la différence de $d\gamma = 0$. On aura deux Equations, qui avec l'Equation propoſée ſerviront à faire connoître les trois grandeurs n, t, γ.

On voit aſſez par cet exemple, qui eſt, ſi je ne me trompe, le plus ſimple qu'on puiſſe choiſir, que ce Problême, réſolu comme il le doit être, eſt plus compliqué qu'on ne paroît l'avoir cru juſqu'ici. C'eſt de quoi on pourra ſe convaincre encore par la lecture des nouvelles réflexions que nous avons faites ſur ce ſujet,

dans le *Tome V de nos Opuſcules, pag.* 148 *& ſuiv.*

370. Enfin, ma troiſiéme & derniere remarque eſt ſur le ſolide de la moindre réſiſtance. Toutes les ſolutions qu'on a données de ce Problême, depuis M. *Newton* incluſivement, me paroiſſent ne pas répondre à la queſtion, ſi on en excepte celles où on ſuppoſe que la maſſe du ſolide eſt donnée. Car il ne ſuffit pas de chercher & de trouver celui d'entre tous les ſolides qui ont le même Axe & la même baſe avec le même ſommet, ſur lequel l'impulſion de l'eau eſt la moindre qu'il eſt poſſible, il faut de plus diviſer cette impulſion par la maſſe entiere pour avoir l'effet qu'elle produit, & qui eſt proprement le *minimum* qu'on cherche.

Il eſt donc queſtion de chercher le ſolide *EABDO* (Fig. 138.), tel que la ſomme des impulſions du Fluide diviſé par la maſſe du ſolide ſoit un *minimum*, c'eſt-à-dire, tel, qu'en imaginant le ſolide *EAeDO* qui en differe infiniment peu, ces deux ſolides ſont entr'eux comme la ſomme des impulſions ſur chacun; ou, ce qui eſt la même choſe, la différence des deux comme la différence des impulſions. Le Problême ſe réduit donc au ſuivant.

Les points A, D *& la ligne* Ba *étant donnée de poſition, trouver la poſition des côtés* AB, BD, *telle, qu'en les faiſant varier infiniment peu de* AB *en* Ae, *&* BD *en* eD, *la différence des impulſions ſoit comme le ſolide formé par* ABeDA *autour de* OK. En nommant $Aa = y$, eB, a, $2n$ le rapport de la circonférence au rayon, & en ſuppoſant les lignes Aa, Bb égales entr'elles, ce qui eſt

permis ici, on aura $2nay\,dy$ pour le petit ſolide, & $4n.a.d\left(\frac{y\,dy^3\,dx}{ds^4}\right)$ pour la différence des impulſions. Donc

$$2na.d\left(\frac{y\,dy^3\,dx}{ds^4}\right) = B\,na\,y\,dy,$$

& $\frac{4y\,dy^3\,dx}{ds^4} = A + Byy$; donc ſuppoſant $a\,dx = z\,dy$, on aura

$$4yz\,a^3 = (Byy + A).(zz + aa)^2,$$

d'où l'on tirera la valeur de z & celle de x. La conſtante B doit être égale au rapport de l'impulſion totale à la maſſe totale, & cette conſtante combinée avec la conſtante A doit de plus être telle, que la courbe OE paſſe par les deux points donnés.

Au reſte, il eſt à remarquer qu'en certains cas il eſt permis de ſuppoſer $A = 0$, lorſqu'en faiſant $y = 0$ tout s'évanouit dans l'Equation $\frac{4y\,dy^3\,dx}{ds^4} = Byy$. On a pour lors $y = \frac{4a^3z}{B.(zz+aa)^2} = \frac{4a^3\sqrt{[uu-aa]}}{Bu^4}$ (en ſuppoſant $zz + aa = uu$) : & $dx = -\frac{16aadu}{Bu^3} + \frac{16a^4du}{Bu^5} + \frac{4aadu}{Bu^3}$; d'où l'on voit que *la courbe eſt Géométrique, lorſque* A = 0.

On trouvera dans le *Tome V de nos Opuſcules, pag.* 146 *& ſuiv.* de nouvelles réflexions ſur ce Problême, & ſur les différens points de vûe ſuivant leſquels on peut en donner la ſolution.

CHAP. IV.

CHAPITRE IV.

Recherches ſur les Fluides qui ſe meuvent en tourbillon, & ſur le mouvement des Corps plongés dans ces Fluides.

JE diviſerai ce Chapitre en deux Parties ou Sections. Je traiterai dans la premiere, des Loix du mouvement d'un Tourbillon fluide; & dans la ſeconde, du mouvement des Corps qui y ſont plongés.

SECTION PREMIERE.

Des Fluides qui ſe meuvent en Tourbillon.

371. Chaque particule d'un Fluide qui ſe meut en Tourbillon, tend à chaque inſtant à s'échapper par la tangente de la courbe qu'elle décrit, & la vîteſſe avec laquelle elle tend à s'échapper par cette tangente, doit être regardée comme compoſée de la vîteſſe qu'elle aura l'inſtant ſuivant, dans la direction du petit côté de la courbe contigu à la tangente, & d'une autre vîteſſe infiniment petite qui eſt détruite, & qui n'eſt autre choſe que ſa force centrifuge.

Donc, pour qu'un Tourbillon ſubſiſte dans un état permanent, il faut que toutes ſes parties ſuppoſées en repos, & animées par des forces égales à leurs forces centrifuges, puiſſent reſter en équilibre.

Il faut de plus, que le mouvement circulaire de chaque couche ſoit tel, qu'il ne puiſſe être ni accéléré ni retardé par celui des autres couches.

Donc, quoique les Loix des forces centrifuges dans un Tourbillon dépendent en partie de celles du mouvement circulaire, néanmoins il faut conſidérer le mouvement circulaire des parties d'un Tourbillon, non-ſeulement par rapport aux changemens qu'il peut recevoir comme mouvement, mais auſſi par rapport à la force centrifuge qui en réſulte.

372. Pluſieurs Auteurs ont donné d'après M. *Newton*, les Loix du mouvement des différentes couches dans un Tourbillon circulaire, mais ils n'ont point penſé à déterminer la Loi de la force centrifuge. Ils ont ſans doute ſuppoſé tacitement, que quelque Loi qu'obſervaſſent les différentes couches du Tourbillon dans leurs mouvemens, elles ſeroient toujours en équilibre en vertu de leurs forces centrifuges, puiſque cette force ſeroit la meme dans tous les points également éloignés du centre.

Néanmoins parmi ceux qui ont attaqué la propoſition de M. *Newton*, quelques-uns lui objectent * qu'en conſéquence de la Loi qu'il aſſigne, la force centrifuge des couches devroit aller en diminuant du centre vers la circonférence; ce qui, ſelon ces Auteurs, eſt impoſſible, puiſque les parties voiſines du centre devroient alors s'en éloigner, & que l'équilibre ſeroit rompu. Cette obſervation ſemble même avoir d'autant plus de force, que M.

* Voyez l'Hydrodyn. de M. *Daniel Bernoulli*, Sect. XI, art. 6.

Newton dans le Scolie de la Prop. 52. l. II, rejette la ſuppoſition que les couches plus voiſines du centre ſoient les plus denſes, par la raiſon, dit-il, que les parties plus denſes doivent s'éloigner le plus du centre.

Il eſt viſible que la queſtion qu'il s'agit de décider ici eſt entiérement analogue à celle que nous avons examinée fort au long dans l'*article* 40 de cet Ouvrage; nous obſerverons ſeulement, qu'au lieu qu'on peut ſuppoſer à la rigueur la peſanteur réglée par une Loi Mathématique, on ne peut faire une pareille ſuppoſition ſur la force centrifuge; car cette force naît du mouvement circulaire des différentes couches, qu'on ne ſauroit regarder comme parfaitement Mathématiques.

D'où nous conclurons que *la force centrifuge ne peut aller en diminuant du centre vers la circonférence, à moins qu'on ne ſuppoſe dans les parties du Tourbillon aſſez de tenacité pour réſiſter au mouvement qui proviendroit de l'inégalité de preſſion.*

COROLLAIRE.

373. De-là il s'enſuit que la force centrifuge ne peut augmenter tellement de la circonférence vers le centre, qu'elle ſoit infinie au centre. Car comme la tenacité des parties du Fluide n'a qu'une réſiſtance finie, puiſqu'il ne faut qu'une force finie pour les diviſer, il eſt conſtant que la force centrifuge ne ſeroit alors que trop grande pour vaincre cette tenacité; ce qui romproit l'équilibre.

Du Tourbillon cylindrique.

PROPOS. I.

374. *Un Tourbillon cylindrique ne peut ſubſiſter dans un Fluide, ſans avoir un Axe infini en longueur.*

Suppoſons que l'Axe du Tourbillon ſoit fini, & imaginons-le renfermé dans un vaſe cylindrique dont la ſection par l'Axe ſoit le rectangle AF (Fig. 139). Si on fait à ce vaſe une petite ouverture en un point quelconque G, il eſt conſtant que la particule de Fluide qui répond à cette ouverture, tendra à s'échapper par-là, puiſqu'elle eſt preſſée ſuivant GV par une force égale à la ſomme des forces centrifuges de la colonne CG, & que la preſſion réagit contre les parois du vaſe. Or comme le Fluide environnant qui eſt hors du vaſe, eſt ſans mouvement (*hyp.*) & ſans force centrifuge, il eſt clair que la particule du Fluide G doit s'échapper, puiſque rien ne réſiſte à ſon effort. Qu'on détruiſe préſentement le vaſe; toutes les particules comme G, n'en feront pas moins d'effort pour s'échapper latéralement & avec des vîteſſes différentes, ſans que rien les en empêche. Donc le Tourbillon ſe diſſipera. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE.

375. *Un Tourbillon cylindrique ne peut ſubſiſter dans un milieu quelconque ſans être infini en tout ſens.* Car 1°. il doit être infini en longueur. 2°. Sa ſurface extérieure ne pouvant être parfaitement Mathématique, il faut néceſſairement, ou que le Tourbillon ſe ralentiſſe & ſe détruiſe

peu-à-peu, ou que ſa ſurface communique ſon mouvement à celle qui la touche, celle-ci à la ſuivante, &c. Donc &c.

Des Loix du mouvement dans le Tourbillon cylindrique.

376. M. *Newton* dans la Prop. 51. l. II de ſes *Principes*, a cherché quelle devoit être la Loi des vîteſſes des différentes couches d'un Tourbillon formé par la rotation d'un Cylindre, tournant autour de ſon Axe au milieu d'un Fluide. Pour cela, il conſidere le Tourbillon comme parvenu à un état permanent, & il cherche quelle doit être la Loi des vîteſſes des différentes couches, pour qu'une couche quelconque ſoit autant retardée par la couche ſupérieure, qu'accélérée par l'inférieure : d'où il conclut que le tems périodique de chaque couche doit être comme le rayon, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe doit être égale dans toutes les couches.

377. On peut, ce me ſemble, objecter deux choſes contre cette Théorie : 1°. la force centrifuge devroit aller en diminuant du centre vers la circonférence ; ce qu'il eſt difficile de ſuppoſer (*art.* 372.) ſur-tout, ſi les particules du Fluide ont peu de tenacité.

2°. De plus, le Cylindre ſolide qui eſt au centre, & dont les parties ſe meuvent d'un même mouvement angulaire, eſt continuellement retardé par le frottement de la couche qui lui eſt immédiatement contigue ; il doit par conſéquent retarder auſſi le mouvement de cette couche, & celle-ci le mouvement des ſuivantes, & ainſi à

l'infini ; auſſi M. *Newton* ſuppoſe-t-il qu'il y ait une force qui rende continuellement au Cylindre la quantité de mouvement qu'il perdroit à chaque inſtant.

3°. D'ailleurs, M. *Newton* n'a déterminé le mouvement des couches du Tourbillon, qu'en ſuppoſant que la force du frottement étoit égale dans toutes les couches. Or il eſt aiſé de faire voir qu'il y a trois cas où cette force eſt nulle. Car ſoit v la vîteſſe d'une couche quelconque, x ſon rayon, on aura $\frac{v}{x}$ pour le mouvement angulaire d'une couche, & $\frac{x\,dv - v\,dx}{x\,x}$ pour ſa vîteſſe angulaire par rapport à la couche infiniment proche. D'où l'on voit que la vîteſſe reſpective des deux couches ſera $\frac{x\,dv - v\,dx}{x}$, & cette vîteſſe multipliée par la circonférence ou par le rayon qui lui eſt proportionnel, donnera dans les Principes de M. *Newton* $x\,dv - v\,dx$ pour la quantité du frottement qu'il faut faire égale à une conſtante $c\,dx$. Or cela poſé, je dis qu'on aura pour intégrale $v = c \pm bx$. Ce qui donne trois cas & même quatre ; ſavoir, 1°. & 2°. celui où c, b ſont toutes deux des quantités réelles, b étant poſitive ou négative. 3°. Celui de $b = 0$ qui donne $c =$ à une conſtante, & qui eſt le cas de M. *Newton*. 4°. Celui de $c = 0$, qui donne $u = bx$. En général, la force du frottement ſera nulle, quand les vîteſſes des couches ſuivront une progreſſion Arithmétique quelconque, dx étant conſtant.

Des quatre cas précédens, on peut exclure celui où c ſeroit poſitif & b négatif, parce qu'il y auroit dans cette hypothèſe une partie du Tourbillon qui ſe mouvroit dans un ſens, & une autre dans un ſens contraire; ce qu'on ne peut imaginer, ſi le Tourbillon reçoit ſon mouvement du Cylindre. Quoi qu'il en ſoit, il eſt certain que les difficultés que nous avons faites contre le cas de $u = c$, s'appliquent auſſi aux trois premiers cas.

378. Il n'y a que le quatriéme de ces cas où les forces centrifuges vont en augmentant depuis le centre, & où l'on n'a pas beſoin d'une force qui entretienne continuellement le Tourbillon. C'eſt pourquoi je ne doute point que ce ne ſoit la véritable Loi du mouvement des couches, & qu'elles ne doivent faire toutes leurs révolutions en même-tems.

Je ne vois contre cette hypothèſe qu'une difficulté à laquelle je crois devoir répondre, parce qu'elle ſe préſentera ſans doute comme aſſez forte à l'eſprit de quelques Lecteurs. C'eſt qu'il n'eſt pas aiſé d'imaginer que les parties les plus éloignées du Cylindre ayent plus de mouvement que celles qui en ſont plus proches, d'autant plus qu'elles ne reçoivent leur mouvement que de celles-là. Je réponds à cette objection, qu'il n'y a dans une pareille diſtribution de mouvement aucune abſurdité, & qu'elle n'eſt pas plus difficile à concevoir que celle qui ſe fait entre deux Corps attachés à un levier du même côté du point fixe, lorſqu'on donne une impulſion à celui qui eſt le plus voiſin du point fixe. Car le plus éloigné

reçoit alors plus de vîteſſe que l'autre n'en conſerve; mais la vîteſſe que reçoit le Corps le plus éloigné, n'eſt jamais auſſi grande que la vîteſſe primitive imprimée au plus proche; il en eſt de même dans la diſtribution du mouvement entre deux différentes couches.

Remarque ſur la formule donnée par M. Bernoulli, *pour les vîteſſes des couches d'un Tourbillon cylindrique.*

379. M. *Bernoulli* dans ſa Diſſertation qui a remporté le prix de l'Académie en 1730, & qui a pour titre: *Nouvelles penſées ſur le ſyſtême de* Deſcartes, *avec la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planetes*, a fait pluſieurs objections contre la Théorie de M. *Newton* que nous venons d'expoſer. Ses difficultés ſe réduiſent à deux principales; ſavoir, à ce que M. *Newton* n'a point fait entrer la preſſion des couches dans l'évaluation de la quantité du frottement, & qu'il n'a point eu égard au bras du levier par lequel chaque couche agit.

Je n'examinerai point ici ſi les objections de M. *Bernoulli* ſont fondées; je me contente de renvoyer le Lecteur au Scolie de la Prop. 52. l. II de M. *Newton*, où l'on verra que ce grand Geometre les avoit prévues au moins en partie: je ferai ſeulement ici une remarque qui pourra être de quelque utilité.

380. M. *Bernoulli* ayant nommé x le rayon d'une couche quelconque, & v ſa vîteſſe, ce qui donne $\frac{x\,dv - v\,dx}{x}$ pour la vîteſſe reſpective de deux couches infiniment proches,

ches, & $x\int\frac{vvdx}{x}$ pour la quantité de la preſſion réſultante de la force centrifuge, multiplie le produit de ces deux quantités par le bras de levier x, ce qui donne $x\times\frac{xdv-vdx}{x}\times\int\frac{vvdx}{x}$, pour la force qui tend à accélérer le mouvement d'une part, & la retarder de l'autre. Faiſant donc cette quantité égale à une conſtante cdx, il a l'Equation ſuivante.

$$(xxdv-vxdx)\times\int\frac{vvdx}{x}=cdx.$$

Pour intégrer cette Equation, il ſuppoſe $v=x^n$, par conſéquent, ſelon lui, $\int\frac{vvdx}{x}=\frac{x^{2n}}{2n}$; d'où il tire après les ſubſtitutions $n=-\frac{1}{3}$.

Mais outre qu'on peut oppoſer à M. *Bernoulli* deux difficultés ſemblables à celles que nous avons faites (*art.* 377.) contre la régle de M. *Newton*, il y en a une autre bien plus conſidérable contre la valeur qu'il aſſigne à n. Cette valeur eſt un nombre négatif; or l'intégrale de $x^{2n-1}dx$ n'eſt point $\frac{x^{2n}}{2n}$, lorſque n eſt un nombre négatif, mais $\frac{x^{2n}+o^{2n}}{2n}$, o^{2n} étant une conſtante infinie. Donc M. *Bernoulli* auroit dû ſuppoſer $\int\frac{vvdx}{x}=\frac{x^{2n}+o^{2n}}{2n}$; mais dans cette ſuppoſition ſon Equation n'auroit plus été homogene, & il n'auroit pû conclure $n=-\frac{1}{3}$ comme

il a fait : d'où il ſuit qu'on ne ſauroit admettre la régle de M. *Bernoulli*.

381. Pour trouver l'intégrale de $(xxdv - vxdx) \times \int \frac{vvdx}{x} = cdx$, & par conſéquent la vîteſſe des couches dans l'hypothèſe de M. *Bernoulli*, je remarque, que la valeur de v en x, quelle qu'elle ſoit, doit au moins être telle que, lorſque x eſt infiniment petite, on ait $v = x^n$, n repréſentant un nombre inconnu. On aura donc, lorſque x eſt infiniment petite, l'Equation $(n-1).x^{n+1}dx \times (\frac{x^{2n} - 0^{2n}}{2n}) = cdx$, Equation dont les deux membres ne peuvent être égaux, à moins qu'on n'ait $n - 1 = 0$, & $n = 1$. Donc lorſque x eſt infiniment petite, on a $v = x$. Je dis préſentement qu'on aura $v = x$ dans toute l'étendue du Tourbillon. Car de ce que $n - 1 = 0$ dans l'Equation précédente, il s'enſuit que la conſtante $c = 0$. Donc en général $xxdv - vxdx = 0$, c'eſt-à-dire, $v = x$.

Donc *dans l'hypothèſe de M.* Bernoulli, *toutes les couches doivent faire leur révolution en même-tems.*

382. Nous avons ſuppoſé avec M. *Bernoulli*, que le frottement de chaque couche étoit proportionnel à la vîteſſe reſpective, & à la quantité de la preſſion. Néanmoins M. *Muſſchenbroek*, dans des expériences fort exactes qu'il a faites ſur cette matiere, a trouvé que quand la vîteſſe reſpective étoit très-petite, le frottement étoit proportionnel à la vîteſſe, mais qu'il n'étoit pas proportionnel au poids. C'eſt pourquoi on pourroit prendre pour

l'Equation différentielle entre v & x, $(xxdv - xvdx) \times \varphi(\int \frac{vvdx}{x}) = cdx$, $\varphi(\int \frac{vvdx}{x})$ exprimant une fonction quelconque de $\int \frac{vvdx}{x}$.

Lorsque x est infiniment petite, cette Equation se réduit à

$$(xxdv - vxdx) \times (\int \frac{vvdx}{x})^m = cdx,$$

m étant un nombre positif quelconque : car il répugne que ce soit un nombre négatif. Cela posé, on prouvera comme on l'a fait (*art.* 381.) que $v = x$ dans toute l'étendue du Tourbillon.

383. Enfin, si on suppose que le frottement soit proportionnel à une fonction quelconque de la vîtesse respective, alors outre l'intégrale $v = x$, il pourroit encore souvent y en avoir une autre. Car soit, par exemple, $xx \times (\frac{xdv - vdx}{x})^m = cdx^m$, on trouve que l'intégrale de cette Equation peut être également $v = x$, & $v = x^{1 - \frac{2}{m}}$: or $1 - \frac{2}{m}$ est une quantité positive, si $m > 2$.

384. Cependant on peut assurer qu'en général, quelle que soit la Loi du frottement, le Tourbillon ne pourra subsister dans un état fixe, que quand toutes ses couches feront leurs révolutions en même-tems. Car comme on ne peut pas pousser la division des particules jusqu'à n'être que des surfaces Mathématiques, on doit nécessairement supposer qu'il y a au centre du Tourbillon un petit espace

circulaire dont tous les points font leur révolution en même-tems, & qui peut être regardé comme un Cylindre ſolide. Or dans cette ſuppoſition, il eſt clair par l'*article* 377, que toutes les couches du Tourbillon feront leur révolution dans le même tems.

Donc en général *pour que le Tourbillon ſubſiſte, il eſt néceſſaire que les tems des révolutions de toutes les couches ſoient égaux entr'eux.*

Du mouvement qu'un Cylindre qui tourne autour de ſon Axe, communique à un Fluide qu'on ſuppoſe l'environner.

385. Nous venons de démontrer que le Cylindre & le Fluide dans lequel il tourne doivent faire leurs révolutions en même-tems, lorſque le Tourbillon eſt arrivé à un état permanent. Il s'agit de déterminer préſentement quelle eſt la vîteſſe avec laquelle le Cylindre fait tourner le Fluide; ou, ce qui revient au même, de trouver la vîteſſe du Fluide, la vîteſſe initiale du Cylindre étant donnée.

386. Soit *ACO* (Fig. 140.) le Cylindre, *SGBAQO* la maſſe fluide qu'il doit faire tourner, renfermée dans un vaſe *SBG* dont je ſuppoſe que les parois ne s'oppoſent nullement à la rotation du Fluide. Imaginons d'abord que cette maſſe fluide *SGBAQO* ſoit glacée, & qu'elle reçoive ſon mouvement du Cylindre *ACO*; il eſt évident qu'à cauſe du frottement mutuel des ſurfaces contigues du Cylindre & du Fluide, le Fluide ne ceſſera de rece-

voir du mouvement, que quand le mouvement angulaire du Cylindre ſera le même que le mouvement angulaire du Fluide.

Pour ſavoir quelle eſt alors la vîteſſe reſtante au Cylindre ACO, car c'eſt à quoi ſe réduit la queſtion, je marque que la force réſultante du frottement des ſurfaces AQO l'une contre l'autre, tend à-la-fois à accélérer le mouvement du Fluide glacé $SGABQO$, & à retarder celui du Cylindre; que cette force ſe diſtribue également dans tous les points d'une même couche circulaire, & que dans deux points A, K de deux couches différentes, elle ſe diſtribue de maniere, que la force en K eſt à la force en A, comme CK à CA, * & que la ſomme des momens de toutes ces forces eſt égale au moment de la force du frottement appliquée en A. Donc ſi la force du frottement en A dans un inſtant quelconque, eſt appellée φ, la circonférence AQO, c, on trouvera $\varphi . c \times CA^3 : (\frac{CB^4 - CA^4}{4})$ pour la force qui accélere à chaque inſtant la ſurface concave. On trouvera par une Méthode ſemblable, que $\varphi . c . CA^3 : (\frac{CA^4}{4})$ eſt la force qui anime la ſurface convexe, & qui tend à la retarder. Donc ſoit que la force φ varie ou non, il eſt conſtant que l'accroiſſement inſtantané de la vîteſſe de la ſurface concave, ſera toujours à ce que la ſurface du Cylindre perd de vîteſſe au même inſtant, comme CA^4 eſt à $CB^4 - CA^4$.

* Voyez l'*art.* 75 du *Traité de Dynamique.*

Soit donc a la vîteſſe initiale du Cylindre, u la vîteſſe de la maſſe fluide glacée $SBGAQO$ dans un inſtant quelconque, la vîteſſe perdue par le Cylindre ſera alors $\frac{u.(CB^4 - CA^4)}{CA^4}$, & par conſéquent $a - \frac{u.(CB^4)}{CA^4}$ la vîteſſe reſpective. Or le Tourbillon n'eſt dans un état permanent, que quand la vîteſſe reſpective $= o$. Donc quand le Tourbillon eſt entiérement formé, on a $u = \frac{a.CA^4}{CB^4}$ pour la vîteſſe qui reſte au Cylindre. *Ce Q. F. Trouver.*

387. Si on ſuppoſoit que δ fût la denſité du Fluide, & Δ celle du Corps, on auroit pour la force qui anime la maſſe fluide glacée, $\varphi.c.\delta \times CA^3 : \delta\,(\frac{CB^4 - CA^4}{4})$, & pour celle qui anime le Cylindre, $\varphi.c.\delta \times CA^3 : \Delta\,(\frac{CA^4}{4})$; d'où l'on conclura que $a - \frac{u.\delta(CB^4 - CA^4)}{\Delta.CA^4} + u$ eſt la vîteſſe reſpective du Cylindre & du Fluide glacé dans un inſtant quelconque, & par conſéquent u ſera égale à $\frac{a.\Delta.CA^4}{(\Delta - \delta).CA^4 + \delta.CB^4}$; c'eſt la vîteſſe du Cylindre après que le Tourbillon eſt formé.

Donc en général, ſi le Fluide $SGBAQO$ eſt ſuppoſé glacé, la vîteſſe de la ſurface BS ſera $\frac{a.\Delta.CA^3.CB}{(\Delta - \delta).CA^4 + \delta.CB^4}$.

388. Préſentement, ſi la maſſe fluide $SGBAQO$ eſt regardée comme véritablement fluide, & qu'on veuille

déterminer de quelle maniere le mouvement du Cylindre ſe communique aux différentes couches, il faudroit ſavoir comment la force qui réſulte du frottement des ſurfaces AQO ſe diſtribue aux différens points du Fluide. Mais c'eſt ce qu'on ne peut déterminer par la Théorie ſeule ſans faire pluſieurs hypothèſes fort éloignées peut-être de la vérité.

Si on ſe rend attentif à ce que l'expérience peut nous apprendre ſur un ſujet ſi compliqué, on remarquera que le mouvement du Cylindre ſe communique d'abord aux couches les plus proches de lui, que celles-ci entraînent les couches voiſines, & ainſi de ſuite. Je crois donc que ce ne ſera pas s'écarter beaucoup de la vérité, que de regarder le Fluide comme compoſé d'une infinité de couches concentriques infiniment minces, & d'une épaiſſeur d'autant plus grande, que le Fluide ſera compoſé de parties plus adhérentes entr'elles, de ſuppoſer enſuite que le Cylindre communique d'abord ſon mouvement à la premiere de ces couches, & l'oblige de ſe mouvoir avec lui d'un même mouvement angulaire, qu'enſuite cette couche conſidérée comme ne faiſant avec le Cylindre qu'un même Corps ſolide, communique ſon mouvement à la Zone ſuivante, & ainſi de ſuite.

De-là il s'enſuit, que ſi on appelle r le rayon du Cylindre, r celui de la premiere couche, R celui de la ſeconde, &c. on trouvera que la vîteſſe de la couche GBO, eſt $a \times \frac{r^4}{r^4} \times \frac{r}{r} \times \frac{r^4}{R^4} \times \frac{R}{r}$ &c. $= \frac{a.CA^4}{CB^4} \times \frac{CB}{CA}$, préciſément la

même, que quand le Fluide *SGBAQO* eſt ſuppoſé glacé, & de même denſité que le Cylindre.

Si le Fluide & le Cylindre étoient de différentes denſités, on trouveroit auſſi pour la vîteſſe de la couche *GBO* la même formule que dans l'*article* 387.

Du Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires.

389. L'exiſtence d'un Tourbillon dont les couches ſont circulaires, eſt évidemment poſſible : il n'en eſt pas de même d'un Tourbillon dont les couches ne ſeroient pas circulaires : ſi on ne voit pas avec clarté qu'un tel Tourbillon ne puiſſe exiſter, on n'en voit pas non plus fort clairement la poſſibilité : jeſpere même démontrer qu'il ne peut y avoir de Tourbillon dont les couches ne ſoient point circulaires ; cette matiere m'a paru aſſez importante & aſſez curieuſe pour mériter d'être approfondie ; c'eſt l'objet de la Théorie que je vais donner.

390. Suppoſons d'abord le Tourbillon exiſtant & arrivé à un état permanent ; & ſoit *ABCD* (Figure 141) une des couches non circulaires de ce Tourbillon ; pour trouver la couche *abcd* qui eſt infiniment proche de celle-là, je remarque que la vîteſſe du Fluide aux points *R*, *S*, doit être en raiſon inverſe des perpendiculaires *Rr*, *Ss*, & que de plus il faut (*art.* 371) que les parties du Fluide ſoient en équilibre en vertu de leurs forces centrifuges.

Or comme la vîteſſe de chaque particule n'eſt pas conſtante dans la courbe qu'elle décrit, il s'enſuit que la

la force centrifuge n'eſt pas perpendiculaire à cette couche; c'eſt pourquoi on la ſuppoſera décompoſée en deux autres forces, dont l'une ſoit perpendiculaire à la couche, & dont l'autre agiſſe dans le ſens de la couche même. Je prouverai dans la ſuite que le Tourbillon ne peut ſubſiſter, à moins que les particules du Fluide ne ſoient en équilibre en vertu de chacune de ces forces en particulier. Je vais donc d'abord conſidérer ici l'équilibre qui réſulte de la force centrifuge eſtimée perpendiculairement à chaque couche, & j'examinerai plus bas l'équilibre qui réſulte de l'autre partie de cette force.

Imaginons donc entre deux couches infiniment proches *ARS*, *ars*, deux petites colomnes *Rr*, *Ss*, perpendiculaires à ces couches, & n'ayons d'abord égard qu'à la partie de la force centrifuge qui agit perpendiculairement aux couches, que nous nommerons déſormais *force centrifuge* ſimplement : il eſt clair que les particules qui ſont dans la petite colomne *Rr*, étant ſuppoſées animées par la force centrifuge qui eſt en *R*, doivent être en équilibre avec les particules de la colomne *Ss* animées de la force centrifuge en *S*. Donc *Rr* doit être à *Ss* (*articles* 20 *&* 56.) comme la force centrifuge en *S* à la force centrifuge en *R*, c'eſt-à-dire, comme le quarré de la vîteſſe en *S*, diviſé par le rayon de la développée en *S*, eſt au quarré de la vîteſſe en *R*, diviſé par le rayon de la développée en *R*. Mais *Rr* eſt à *Ss*, comme la vîteſſe en *S* à la vîteſſe en *R*. Donc *la vîteſſe en* R *eſt à la vîteſſe en* S, *comme le rayon de la développée en* R *eſt au rayon en* S;

c'eſt-à-dire, que R r *doit être à* S s *comme le rayon de la développée en* S *au rayon de la développée en* R.

Suppoſant donc le Tourbillon poſſible, on voit que l'une des couches *ADBC* étant donnée, on peut trouver toutes les autres.

Donc ſi le Tourbillon eſt formé par un Fluide renfermé dans un vaſe *ADBC* de figure donnée; comme l'on connoît la premiere couche *ADBC*, on connoîtra par ce moyen la ſeconde, enſuite la troiſiéme &c.

Il ne nous reſte plus qu'à examiner ſi un pareil Tourbillon peut exiſter; c'eſt ce que nous verrons dans les Remarques ſuivantes.

Remarque I.

391. Si on ſuppoſe le Tourbillon renfermé dans un vaſe immobile *ARS*, (Fig. 141.) & que les différentes couches du Tourbillon ne faſſent pas leur révolution en même-tems, il doit réſulter néceſſairement de leur adhérence mutuelle un frottement qui détruira peu-à-peu le mouvement, & anéantira enfin le Tourbillon. Donc *pour que le Tourbillon ſubſiſte, il eſt néceſſaire que toutes les couches faſſent leurs révolutions en même-tems.* Or je vais faire voir d'abord qu'il n'y a que le Tourbillon circulaire où cette Loi puiſſe s'obſerver.

En effet, nous avons vu ci-deſſus, que la vîteſſe en *A* devoit être à la vîteſſe en *R*, comme le rayon oſculateur en *A* eſt au rayon oſculateur en *R*: par conſéquent, ſi on appelle *B* le rayon oſculateur en *A*, & *R* le rayon oſcu-

lateur en R, & qu'on ſuppoſe la vîteſſe en A repréſentée par B, la vîteſſe en R ſera repréſentée par R; par la même raiſon, la vîteſſe en a doit être à la vîteſſe en r, comme le rayon oſculateur en a eſt au rayon oſculateur en r. Mais ſi les couches ARS, ars, font leur révolution dans le même-tems, la viteſſe en a doit être $= B - Aa$, & la vîteſſe en $R = R - Rr$. Il faut donc que $B - Aa$ ſoit à $R - Rr$, comme le rayon oſculateur de la courbe ars en a au rayon oſculateur en r; c'eſt-à-dire, qu'en général la courbe ars doit être telle par rapport à la courbe ARS, que le rayon oſculateur de la courbe ars en un point quelconque r, ſoit en raiſon conſtante, avec le rayon oſculateur de la courbe ARS en R, diminué de la quantité Rr; ou, ce qui eſt la même choſe, il faut que le rayon oſculateur de la courbe ars en un point quelconque r, ſoit en raiſon conſtante avec le rayon oſculateur de la courbe, qui paſſant par r auroit la même développée que ARS.

Pour déterminer la courbe ARS (Fig. 143.) par ces conditions, ſoient RS, SN, deux côtés égaux & conſécutifs de cette courbe $ARSN$, dont RQ, SG, NL ſoient les rayons oſculateurs en R, S, N; $arsn$ la courbe qui forme la couche infiniment proche, & qui eſt telle, (*art.* 390.) que $Rr.RQ = Ss.SG = Nn.NL$; ms, st deux petits Arcs parallèles à NS & SR, & qui appartiennent à la courbe dont la développée eſt la même que celle de ARS; ayant fait $SG = R$, $RQ = R - dR$, $NL = R + dR$, la conſtante $SR = ds$, la donnée $Aa = n\,ds$ (n exprimant un nombre conſtant), on aura

$Ss = \frac{Bnds}{R}$; $Rr = \frac{Bnds}{R} + \frac{BndsdR}{RR}$; $Nn = \frac{Bnds}{R} - \frac{BndsdR}{RR}$; & par conſéquent $tr = \frac{BndsdR}{RR}$; $nm = \frac{BndsdR}{RR}$: de plus, sr ou $ts = \frac{SR \times sQ}{SQ} = ds.(R - \frac{Bnds}{R} - dR) : (R - dR) = ds(1 - \frac{Bnds}{RR})$. Donc l'angle rst ou $\frac{rt}{sr} = \frac{BndsdR}{RRds - Bnds^2}$; on trouvera de même l'angle $nsm = \frac{BndsdR}{RRds - Bnds^2}$. Or le rayon oſculateur de la courbe nsr eſt à celui de la courbe mst, comme le Sinus de l'angle de contingence $\frac{ds}{r}$ de la courbe mst, eſt au Sinus de l'angle de contingence de la courbe nsr, qui eſt $\frac{ds}{r} - nsm + tsr$. Il faut donc que ces deux Sinus de contingence ſoient en raiſon conſtante, c'eſt-à-dire, il faut que $BndR : (Rds - \frac{Bnds^2}{R}) - BndR : (Rds - \frac{Bnds^2}{R})$ ſoit égale à une quantité conſtante $\frac{pds}{a}$; d'où il s'enſuit (à cauſe que $dR - dR = -ddR$, & que dR & dR ne different l'un de l'autre que d'un infiniment petit du ſecond ordre) que

$$\frac{-ddR}{R} = \frac{pds^2}{aa},$$

en ſuppoſant $nB = a$. D'où l'on tire

$$ds = dR : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{aa}]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Z).$$

Voilà quelle doit être l'Equation entre les Arcs AR, de la courbe ARS, & les rayons de la développée qui leur répondent; mais il faut remarquer que la courbe ars doit avoir par rapport à la couche qui la suit immédiatement, la même propriété que la courbe ARS a par rapport à la courbe ars. D'où il s'enfuit qu'en nommant s les Arcs de la courbe ars, R les rayons osculateurs correspondans, il faut que

$$ds = dR : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{aa}]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Y).$$

Pour voir si cette Equation est vraie, je remarque d'abord qu'on peut supposer $p = p + \frac{2qds}{a}$, $m = m + \frac{nds}{a}$ (q & n étant des nombres constans): de plus, $R : R - \frac{Bnds}{R} :: 1 : 1 + \frac{pds}{a}$; & $ds : ds :: R - \frac{Bnds}{R} : R$; de-là on tirera la valeur de R & celle de dR, aussi-bien que celle de ds, & ces valeurs étant substituées avec celles de m & de p dans l'Equation (Y); on aura, après avoir ôté ce qui se détruit;

$$-\frac{Bnds}{RR} = (\frac{BndR}{RR} - \frac{pdR}{a}) : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{a}]}$$

$$+ (\frac{qRRdR - appnBdR - ppRRdR - aamndR}{a^3}) : [mm - \frac{pRR}{a}]^{\frac{3}{2}}.$$

Or il est impossible, comme on le peut voir aisément, que cette derniere Equation soit vraie en même-tems que l'Equation (Z), à moins que le rayon R ne soit constant. Car on trouvera après en avoir fait le calcul, que pour

que ces deux Equations s'accordaſſent, il faudroit qu'on eût $2mm - \frac{RR}{aa}(3p + mn + pmm) + \frac{qR^4}{a^4} = 0$. Or 1°. lorſque p eſt poſitif, on ne ſauroit ſuppoſer $m = 0$, puiſqu'autrement l'Equation $ds = dR : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{aa}]}$ ſeroit imaginaire; d'où il s'enſuit que cette Equation ne peut avoir lieu pour lors, à moins que R ne ſoit conſtant. 2°. Si p eſt négatif, & qu'on ſuppoſe $m = 0$, alors il faudroit encore avoir $q = 0$, & $p = 0$. Ce qui donne R conſtant.

Donc *un Tourbillon renfermé dans un vaſe, & dont toutes les couches font leur révolution en même-tems, ne ſauroit ſubſiſter, à moins que ſes couches ne ſoient circulaires.*

On pourroit nous objecter que nous avons ſuppoſé dans la démonſtration précédente, la néceſſité de l'équilibre des colomnes Rr, Ss, en vertu de la ſeule force centrifuge eſtimée perpendiculairement à ces couches, ſans avoir encore démontré la néceſſité de cet équilibre. Mais on va voir par la Théorie que nous établirons dans la Remarque ſuivante, que cette ſuppoſition ne nuit point à la démonſtration.

Remarque II.

392. Nous allons démontrer à préſent en général, l'impoſſibilité d'un Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires.

Nous imaginerons d'abord que deux des courbes ARS, ars, (Figure 141.) qui repréſentent les couches infini-

ment proches du Tourbillon, ſoient deux Orbes ſolides, & que le Fluide ſe meuve dans l'eſpace qui eſt entre ces deux Orbes, comme dans un Canal fermé de toute part; il eſt conſtant, comme nous l'avons déja remarqué, que les parois de ce Canal ſeront preſſés, non-ſeulement par la force centrifuge des parties du Fluide, eſtimée perpendiculairement à chaque couche, mais encore par une autre partie de la force centrifuge qui agit dans la direction de chaque couche. C'eſt de cette derniere force que réſulte l'action mutuelle des tranches Rr, Ss pour ſe pouſſer les unes les autres. Or ſi on ſuppoſe que Aa ſoit l'endroit du Canal où le Fluide ſe meuve avec le plus de vîteſſe, & qu'on faſſe la vîteſſe du Fluide en cet endroit, égale à u, on trouvera (*art.* 145 *&* 246.) que la preſſion en R eſt $\frac{uu(Rr^2 - Aa^2)}{2Rr^2}$, ou (faiſant $uu = 2pc$) $pc\left(1 - \frac{Aa^2}{Rr^2}\right)$.

Donc ſi on fait au Canal $ARSsraA$ une petite ouverture en R, le Fluide s'échappera néceſſairement, ſoit que le Canal $ARSsraA$ ſoit dans le vuide, ou dans un Fluide ſtagnant pareil à celui qui circule dans ce Canal.

393. De-là il eſt aiſé de conclure en premier lieu, qu'*un Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires, ne ſauroit ſubſiſter dans un Fluide indéfini, quelque hypothèſe qu'on faſſe ſur la vîteſſe de ſes differentes couches.* Ce qui ſuffit pour renverſer entiérement l'idée de ceux qui ont voulu ſubſtituer aux Tourbillons circulaires de *Deſcartes* des Tourbillons elliptiques, s'imaginant qu'ils ex-

pliqueroient plus facilement les Phenomenes par ce moyen.

394. En ſecond lieu, ſi on ſuppoſe que le Fluide ſoit renfermé dans un vaſe, & que les colomnes Rr, Ss ſoient en équilibre, il faut de plus, que les Canaux AR, ar, y ſoient auſſi. En effet, ſoit ARS, le vaſe, & ars, HEe, hMm, &c. les courbes que le Fluide eſt ſuppoſé décrire: pour que le Tourbillon puiſſe ſubſiſter, il faut (en imaginant la courbe $RrEM$ perpendiculaire à toutes les couches du Tourbillon), que la preſſion en R & en E ſoit la même (*articles* 20 *&* 56.) : or par la formule ci-deſſus, il eſt évident que la preſſion en R ſera proportionnelle au quarré de la vîteſſe en A moins le quarré de la vîteſſe en R : de même la preſſion en E ſera égale au quarré de la vîteſſe en E moins le quarré de la vîteſſe en H, il faut donc que le quarré de la vîteſſe en A moins le quarré de la vîteſſe en H, ſoit égale au quarré de la vîteſſe en R moins le quarré de la vîteſſe en E.

De-là il s'enſuit que la courbe ARS doit être telle, que le quarré de la vîteſſe en A moins le quarré de la vîteſſe en R, ſoit égal au quarré de la vîteſſe en a moins le quarré de la vîteſſe en r; & qu'il en doit être de même de la couche ars par rapport à la couche immédiatement ſuivante &c.

Or cette Loi auroit lieu dans le Tourbillon, ſi toutes les couches ſe mouvoient d'un même mouvement angulaire.

Car on auroit $BB - RR = (B - nds)^2 - (R - \frac{Bnds}{R})^2$.

De-là

De-là il s'enſuit, que quand toutes les couches d'un Tourbillon ſe meuvent d'un même mouvement angulaire, on a raiſon de ſuppoſer que les Canaux Aa, Rr ſont en équilibre entr'eux. Car il eſt viſible que les Canaux AR, ar, ſeront auſſi en équilibre.

Mais nous avons vu ci-deſſus, qu'un pareil Tourbillon étoit impoſſible. Donc &c.

395. Au reſte, outre l'hypothèſe dont nous venons de faire mention, il y en a un grand nombre d'autres, où l'exiſtence du Tourbillon eſt encore impoſſible. Car ſi on vouloit, par exemple, que les vîteſſes des points correſpondans A & a, R & r, de deux couches différentes fuſſent égales entr'elles, ce qui, dans l'hypothèſe de M. *Newton* rapportée ci-deſſus (*art.* 377.) rendroit la force du frottement égale dans toutes les couches, on auroit encore l'équilibre entre les Canaux AR, ar, & entre les Canaux Aa, Rr. Or je dis que dans cette hypothèſe même, qui, comme nous l'avons vu, eſt ſujette à beaucoup de difficultés, le Tourbillon ſeroit encore impoſſible. Ce que je démontre en cette ſorte.

Comme les vîteſſes dans chaque couche doivent encore ici être proportionnelles aux rayons oſculateurs, ſi on ſuppoſe que R repréſente la vîteſſe dans la premiere couche ARS, αR pourra repréſenter la vîteſſe dans la couche ſuivante ars, α étant un nombre conſtant qu'on ſuppoſe différer très-peu de l'unité. Donc ſi la Loi dont il s'agit avoit lieu, il faudroit qu'on eût

$$RR - \alpha\alpha RR = akds,$$

k repréſentant auſſi un nombre conſtant; donc prenant $\alpha = 1 + \frac{gds}{a}$, & remarquant que $RR = (R - \frac{Bnds}{R})^2 \times 1 : (1 - \frac{BnddR}{Rds})^2 = RR + 2Bnds - \frac{2BnRddR}{ds}$, on auroit, en ſuppoſant $Bn = a$, & $k - 2 = h$.

$$-ddR = \frac{aahds^2 + RRgds^2}{2aR} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V),$$

& par conſéquent l'Equation de la courbe ARS devroit être

$$-\frac{dR^2}{2} = ds^2 \left(\frac{ah}{2} \log. R + \frac{gRR}{2} - mm\right);$$

il faudroit donc pour que le Tourbillon fût poſſible, que la courbe *ars* eût une Equation analogue à celle-là. Or on prouvera par une Méthode ſemblable à celle de l'*article* 392, que cela ne ſauroit être. Donc &c.

REMARQUE III.

396. En voilà, ce me ſemble, aſſez pour nous convaincre, qu'*un Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires, ne ſauroit ſubſiſter.* Car nous avons fait voir 1°. qu'il ne pouvoit ſubſiſter dans un Fluide indéfini: 2°. que s'il étoit formé par un Fluide renfermé dans un vaſe, il falloit que toutes les couches fiſſent leurs révolutions en même-tems, & que cette derniere hypothèſe renfermoit contradiction.

On pourroit encore s'y prendre d'une autre maniere, pour prouver l'impoſſibilité d'un pareil Tourbillon: voici comment. Nous avons vû que la diſtance d'une couche

à l'autre devoit être en raiſon inverſe du rayon de la développée. Donc ſi on prend trois couches AR, ar, $a\rho$ (Fig. 142.) infiniment proches l'une de l'autre, il faut que Rr ſoit à $R\rho :: Aa : A\alpha$, & par conſéquent $Rr : Aa :: r\rho : a\alpha$; d'où il s'enſuit que les rayons oſculateurs en a, A, r, R, doivent être proportionnels. Or cela poſé, on verra que l'Equation entre R & s devroit être de la même forme, que l'Equation (V) qu'on a trouvée dans l'article précédent; & comme cette Equation (V) ne peut appartenir à toutes les couches, il s'enſuit &c.

On trouvera dans le *Tome I. de nos Opuſcules*, quatriéme Mémoire, Art. XII & XIII, *pag.* 148 *& ſuiv.* de nouvelles recherches ſur les Loix du mouvement d'un Fluide qui ſe meut ſuivant des courbes rentrantes en elles-mêmes. Nous y avons donné des formules analytiques très-ſimples, dans leſquelles ſont renfermées les Loix de ce mouvement.

Du mouvement & de la direction des forces dans un Tourbillon, dont les particules ſont peſantes.

PROPOSITION I.

397. *Si un Fluide renfermé dans un vaſe, eſt compoſé de parties qui peſent chacune en particulier ſuivant telle direction & avec telle force qu'on voudra, & que ce Fluide vienne à former un Tourbillon par quelque raiſon que ce ſoit, je dis que la peſanteur de ſes parties ne contribuera en rien à accélérer ou à retarder le mouvement du Tourbillon.*

Car le Tourbillon étant une fois formé & dans un état permanent, il eſt clair que les particules du Fluide, ſuppoſées animées par des forces égales à leurs forces centrifuges, combinées avec leurs peſanteurs, ſeroient en équilibre; or par hypothèſe, elles ſont en équilibre en vertu de leurs ſeules peſanteurs; donc elles doivent être en équilibre en vertu de leurs ſeules forces centrifuges. Donc quand les particules ſeroient tout-à-coup dénuées de leurs peſanteurs, le Tourbillon ne laiſſeroit pas de ſubſiſter dans le même état. Donc &c.

PROPOS. II.

398. *Si toutes les particules d'un Tourbillon cylindrique renfermé dans un vaſe font leur révolution en même-tems, & qu'on prenne* CB *à* CA (Fig. 144, 145, 146.) *comme la peſanteur des particules eſt à la force centrifuge en* A; *je dis* 1°. *que ſi* CA = *ou* < CB (Fig. 144, 145.) *la preſſion du Fluide contre le vaſe ſera la même que quand le Fluide étoit en repos, & preſſoit le vaſe par ſa ſeule peſanteur.*

2°. *Que ſi* CB < CA (Fig. 146.) *la preſſion du Fluide contre le vaſe ſera plus grande que quand le vaſe étoit en repos.*

Car puiſque toutes les particules du Fluide tournent en même-tems, leurs forces centrifuges ſeront comme leurs diſtances au centre *C*: or on a pris *CB* à *CA* comme la peſanteur à la force centrifuge en *A*; donc ſi on prend la ligne *CB* pour repréſenter la peſanteur, il eſt aiſé de

voir que la direction d'une particule quelconque G, en vertu de sa pesanteur & de sa force centrifuge combinées, sera la ligne GB, & que cette ligne GB marquera l'effort du point G suivant BG.

Donc 1°. si $CA = CB$ (Fig. 144), & qu'on nomme p la pesanteur, la pression du point G sera égale au poids de la colomne AG, c'est-à-dire, à $\frac{p.AG^2}{2CA} = p.AO$, précisément *la même qu'elle seroit, si le vase étoit en repos.*

2°. Si $CB > CA$ (Fig. 145); alors décrivant du centre B l'Arc GN, il est visible que l'effort contre le point G est égal au poids de la colomne AN, c'est-à-dire, à $\frac{p.(BG^2 - BA^2)}{2BC} = p.AO$; encore *la même qu'elle seroit, si le vase étoit en repos.*

3°. Si $CB < CA$ (Fig. 146); alors la pression en G est $\frac{p.BG^2}{2BC} = p.BO + \frac{p.(CA^2 - CB^2)}{2CB} = p.BO + \frac{p.BR^2}{2BC} > p.AO$. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

PROPOS. III.

399. *Soit un Tourbillon cylindrique dont les parties ne faſſent pas leur révolution en même-tems, & dans lequel la force centrifuge aille en augmentant du centre vers la circonférence, & ſuppoſons que* B *ſoit le point où la peſanteur ſeroit égale à la force centrifuge; je dis que ſi* BC = *ou* > CA, (Fig. 147.) *le vaſe ſupportera la même preſſion, que ſi le Fluide étoit en repos; & que ſi*

$CB < CA$, *la preſſion ſera plus grande, que quand le Fluide étoit en repos.*

1°. Il eſt facile de voir que toutes les courbes BMG ſuivant leſquelles ſont dirigées les efforts des particules, partent, ou ſont cenſées partir du point B comme de leur centre commun. Cela poſé, ſoit $BP = x$, $PM = y$, la peſanteur $= p$, la force centrifuge, variable ou conſtante, $= F$; nous aurons $MR : Rm :: p - \frac{F.(b-x)}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}} : \frac{Fy}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}}$; d'où l'on voit que le poids de Mm eſt égal à $p\,dx + \frac{F(y\,dy - dx\,[b-x])}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}}$. Donc le poids de Mm eſt égal à $p.BP$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal CM, moins la ſomme des forces centrifuges du Canal CB.

Donc 1°. ſi $CA = CB$, l'effort contre le point G ſera le même, que ſi le Fluide étoit en repos.

2°. Si $BC > CA$, l'effort contre le point G eſt égal (Fig. 145.) * à la preſſion du Canal BG moins celle du Canal BA, puiſque ſi on imagine la courbe GN perpendiculaire à toutes les courbes qui partent du point B, il eſt conſtant que le poids de BN eſt égal au poids de BG, & que la preſſion de N ſera égale à la preſſion en G, c'eſt-à-dire, au poids de AN. Donc la preſſion en G eſt égale à $p.BO$, moins la ſomme des forces centrifuges du Canal BA, moins $p.BA$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal BA, c'eſt-à-dire, égale à $p.AO$.

* On ſuppoſe ici que BGQ ſoit une courbe.

3°. Si $CB < CA$ (Fig. 147), alors la preſſion en G eſt égal à $p.BO$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal BA : mais comme les forces centrifuges depuis B juſqu'en A ſont (*hyp.*) plus grandes que la peſanteur, il s'enſuit que le poids du Canal BA eſt moindre que la ſomme des forces centrifuges dans ce Canal. Donc la preſſion en G eſt plus grande que $p\,(BO + BA)$, c'eſt-à-dire, plus grande que $p.AO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

400. Dans les deux premiers cas du Théorême précédent, la preſſion en un point quelconque Q eſt égale (Fig. 144, 145.) à $p.AK$, moins la ſomme des forces centrifuges du Canal An*, & dans le troiſiéme cas elle eſt égale à $p.BK$ (Fig. 146.) moins la ſomme des forces centrifuges du Canal Bn.

REMARQUE.

401. Pour déterminer la nature de la courbe BG, on tirera (Fig. 148.) le rayon CS, & on décompoſera l'action de la peſanteur ſuivant Su en deux autres, dont l'une ſoit perpendiculaire à CS, & l'autre ſoit dans la direction SC. On trouvera que la premiere de ces deux forces eſt $\frac{p.St}{Su} = \frac{p.PR}{CR}$, & que l'autre eſt $\frac{p.CP}{CR}$. Si donc on ſuppoſe la force centrifuge proportionnelle à une fonction quelconque du rayon, & qu'on appelle f, la force

* L'Arc Qn dans les Figures 144, 145 & 146, eſt un Arc de Cercle décrit du centre C ; dans la Figure 145, on l'a décrit d'un centre plus bas pour éviter la confuſion.

centrifuge en A; CA, r; CS, z; la force centrifuge en $S, \frac{f\phi z}{\phi r}$; CP, u; on aura $Rr = \frac{-rdu}{\sqrt{[(rr-uu)]}}$; &

$$St\left(\frac{-rdu}{\sqrt{[(rr-uu)]}} \times \frac{z}{r}\right) : st(dz) :: \frac{p\sqrt{[(rr-uu)]}}{r} : \frac{f\phi z}{\phi r} - \frac{pu}{r};$$

$$\text{Donc } d\left(\frac{pz\sqrt{[rr-uu]}}{r}\right) = \frac{-fz\phi z du}{\phi r\sqrt{[(rr-uu)]}}.$$

Cette Equation a une analogie ſinguliere avec l'Equation des trajectoires dans les milieux réſiſtans. *Voyez cideſſus, art.* 357. Toute la différence que ces deux Equations ont entr'elles, c'eſt que r dans l'une eſt a dans l'autre, que $\frac{2f}{3}$ dans la ſeconde eſt f dans la premiere, & que $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}}$ eſt $\frac{\sqrt{[rr-uu]}}{r}$. Donc ſi on avoit nommé CS, u, la force centrifuge en A, $\frac{2f}{3}$, & AQ, z, on auroit eu préciſément la même Equation que celle des trajectoires dans des milieux réſiſtans.

Donc la courbe dont il s'agit ici, ſera conſtructible en différens cas qu'on trouvera par l'*article* 356.

De la preſſion d'un Tourbillon cylindrique, dont l'Axe n'eſt pas horizontal.

402. Lorſque l'Axe du cylindre eſt incliné à l'horizon, & que par conſéquent la peſanteur n'agit pas dans le plan de chaque Cercle décrit par la matiere du Tourbillon, alors pour trouver la preſſion du Fluide, on commencera par décompoſer l'effort abſolu de la peſanteur en deux

deux autres, l'un parallèle à l'Axe, l'autre parallèle à la baſe du Cylindre. Il eſt clair que ces deux forces ſeront en raiſon donnée avec la peſanteur abſolue, & conſtantes par conſéquent. Après avoir trouvé (*art.* 398 *&* 399.) la direction des forces dans le plan de chaque Cercle parallèle à la baſe, on cherchera l'effort des particules du Fluide, réſultant de leur effort dans le plan de chaque Cercle, & de leur effort parallèle à l'Axe, & la direction de cette preſſion ſera ſuivant des courbes à double courbure, qui pourront être regardées comme autant de Canaux dans leſquels le Fluide peſe.

Cela poſé, ſi *GQAF* (Fig. 149.) eſt la ſection du Cylindre par un plan vertical & paſſant par l'Axe, & que la peſanteur en *A* ſuivant *AF* ſoit ſuppoſée égale à la force centrifuge, il eſt clair que la preſſion du Fluide contre un point quelconque *K*, ſera égale à la preſſion qu'exerceroit le Fluide renfermé dans un Canal *AkK*, formé par la courbe *AOk*, ſuivant laquelle les particules peſent dans le plan du Cercle, & par la droite *kK*: or la preſſion du Canal *AOk* étant égale au poids du Canal *AV* ſuivant *AF*, & le poids des Canaux *AV*, & *kK* étant égal, comme il eſt aiſé de le prouver, au poids abſolu du Canal vertical *AR* terminé par l'horizontale *kR*, il s'enſuit que la preſſion du Fluide ſera la même que ſi le Fluide étoit en repos.

Si la peſanteur en *A* ſuivant *AF* eſt plus grande que la force centrifuge, on prouvera de même que la preſſion en *K* ſera égale à celle qu'exerceroit un Fluide ren-

fermé dans le Canal *AZkK*. Or comme la force centrifuge qui agit perpendiculairement aux parois du Canal *AZkK*, ne ſauroit augmenter la preſſion de ce Canal, on trouvera que la preſſion en *K* eſt égale au poids abſolu du Canal *AR*, comme dans le cas précédent.

Enfin, ſi la peſanteur en *A* ſuivant *AF* (Figure 150.) eſt plus petite que la force centrifuge, & que *B* ſoit le point où ces deux forces ſoient égales, on trouve que la preſſion contre un point quelconque *Q* eſt égale au poids des Canaux *BG*, *GQ*, c'eſt-à-dire, plus grande que le poids abſolu de la colomne *AR*.

Des Loix du mouvement & de l'équilibre dans le Tourbillon ſphérique.

403. Nous avons vû (*article* 375.) qu'un Tourbillon cylindrique pouvoit ſubſiſter dans un milieu en repos, pourvû que ſa ſurface extérieure fût parfaitement Mathématique. Il n'en eſt pas de même du Tourbillon ſphérique : car un pareil Tourbillon ne peut ſubſiſter dans quelque milieu & dans quelque hypothèſe que ce ſoit. Pour le faire voir, nous remarquerons que la force centrifuge de chaque particule tend à l'écarter de l'Axe, & qu'elle ſe décompoſe en deux autres forces, l'une perpendiculaire au Tourbillon, l'autre dans la direction du Méridien : or ſi on ſuppoſe maintenant que le Tourbillon ſoit renfermé dans un vaſe, il eſt conſtant que quand bien même les forces des particules *Q* ſuivant *CQ* (Fig. 151.) ſeroient égales entr'elles, ce qui eſt le cas le plus favorable, le

Fluide ne laiſſeroit pas de s'échapper par Q, ſi on faiſoit en cet endroit une ouverture, à cauſe de la preſſion que ſouffre ce point Q dans la direction du Méridien; preſſion qui réagit (*art. 6 & 7.*) contre les parois du vaſe. Donc le Fluide renfermé dans un vaſe ouvert en Q n'y ſeroit point en équilibre. Donc il ne ſera pas non plus en équilibre, le vaſe étant ſuppoſé détruit.

Donc *un Tourbillon ſphérique ne ſauroit ſubſiſter dans un milieu quelconque.*

PROPOS. I.

404. *Un Tourbillon ſphérique renfermé dans un vaſe ne ſauroit ſubſiſter, à moins que toutes les particules* Q, q, K, *également diſtantes de l'Axe ne faſſent leur révolution en même-tems.*

Car on déduit aiſément de ce qui a été démontré dans l'*article 36*, que la couche cylindrique, engendrée par la révolution de QK autour de EB, doit être également preſſée en tous ſes points. D'où il s'enſuit que les forces centrifuges doivent être égales en Q, q, K, & qu'ainſi les vîteſſes de ces points doivent être égales entr'elles.

PROPOS. II.

405. *Pour qu'un Tourbillon ſphérique renfermé dans un vaſe qui tourne, ſubſiſte dans un état permanent, il faut que toutes ſes particules faſſent leur révolution en tems égal.*

Car comme les particules ſolides du vaſe font leur révolution dans le même-tems, les particules Q du Fluide

qui ſont adhérentes au vaſe & entraînées par ſes parois, doivent auſſi faire leur révolution dans le même-tems. Mais on a prouvé ci-deſſus, que toutes les particules K, q &c. devoient faire leur révolution en même-tems que la particule Q. Donc &c.

La même choſe peut ſe prouver encore par la Loi du frottement des différentes couches, en ſe ſervant d'une Méthode ſemblable à celle des *art.* 377 & 384; car on prouvera que tous les points de la colomne QD doivent faire leur révolution en même-tems; d'où l'on conclura (*art.* 404.) que tous les autres points doivent auſſi faire leur révolution dans le même-tems. Je ſai que M. *Newton* l. II. Prop. 52, trouve une autre Loi pour les tems périodiques des différentes couches. Mais outre que dans la ſuppoſition de M. *Newton*, la force centrifuge ſeroit infinie au centre, & que le Tourbillon peut encore ſubſiſter dans ſes principes, en ſuppoſant un même mouvement angulaire dans toutes ſes couches; il ne paroît pas qu'on puiſſe, comme le fait M. *Newton*, & après lui M. *Bernoulli*, regarder toutes les couches du Tourbillon comme des couches ſphériques ſolides, dont tous les points font leur révolution en tems égal. Car il réſulte de l'*art.* 404, que cette ſuppoſition n'a lieu que dans le cas, où toutes les particules du Tourbillon ont un même mouvement angulaire autour de l'Axe.

REMARQUE.

406. Préſentement, ſi on ſe propoſe de déterminer la

preſſion qu'un Fluide renfermé dans un vaſe ſphérique & mû en Tourbillon exerce contre les parois du vaſe, lorſque ſes particules ſont peſantes, on commencera par imaginer un plan vertical qui paſſe par l'Axe du Tourbillon. Cela poſé,

1°. Si l'Axe eſt horizontal, on prendra CB (Fig. 152.) ou Cb, ou $C\overset{\frown}{b}$ à CA, comme la peſanteur à la force centrifuge en A; & on verra aiſément, que dans tous les cas la preſſion du Fluide contre un point quelconque du vaſe, dont la projection ſoit Q ſur un Cercle bOD perpendiculaire à l'Axe MN, ſera le même que ſouffriroit le point Q dans le Cercle bOD. Or cette preſſion a été déterminée ci-deſſus (*article* 400.)

2°. Si l'Axe eſt incliné à l'horizon, on commencera par décompoſer l'effort de la peſanteur en deux autres, l'un parallèle à l'Axe, l'autre parallèle à l'Equateur du Tourbillon; & on cherchera dans le grand Cercle vertical MnN (Fig. 153.) le point n ou la direction de la force réſultante de la peſanteur & de la force centrifuge, eſt perpendiculaire à la Sphere. Cela poſé, je dis que la preſſion que ſouffrira la ſurface en un point quelconque O, ſera égale à celle qu'exerceroit contre ce point O le Fluide renfermé dans un Canal nQO, formé par un Arc nQ du Cercle parallèle à l'Equateur CZ, & un Arc QO du Méridien NOM paſſant par le point O. Or la preſſion du Fluide renfermé dans ce Canal eſt aiſée à déterminer par les Méthodes précédentes.

SECTION II.

Du mouvement des Corps plongés dans un Tourbillon.

PROPOSITION I.

407. *Un Corps de figure quelconque plongé dans un Tourbillon, eſt pouſſé de la circonférence au centre avec une force égale à la force centrifuge du volume de Fluide, dont il occupe la place.*

La queſtion ſe réduit à prouver, que ſi un Corps de figure quelconque eſt placé dans un Fluide en repos, & dont les parties tendent à s'éloigner d'un centre avec une force connue : ce Corps tendra à deſcendre vers ce même centre avec une force égale à celle du volume de Fluide dont il occupe la place, c'eſt-à-dire, pour parler plus exactement, qu'il tendra à deſcendre avec la même force, que ſi, abſtraction faite du Fluide & ſuppoſant le Corps de même denſité que le Fluide, chacune des parties de ce Corps étoit animée d'une force centripéte égale à la force centrifuge qu'auroient eue les parties de Fluide dont elle occupe la place; ou enfin que ce Corps tend à deſcendre avec la même force qu'il auroit, ſi, étant d'une denſité différente de celle du Fluide, ſa force centripéte étoit à la force centrifuge du Fluide, comme la denſité du Fluide eſt à celle du Corps.

Or, pour peu qu'on faſſe d'attention à ces deux dernieres propoſitions, on verra facilement que l'une & l'autre ſeront démontrées, dès que nous aurons prouvé qu'une

partie quelconque du Fluide étant durcie, & conſervant d'ailleurs toute ſa force centrifuge, elle doit demeurer en équilibre. Car ſi cette partie durcie eſt en équilibre en conſervant ſa force centrifuge, il eſt conſtant qu'elle reſteroit encore en équilibre, ſa denſité étant augmentée ou diminuée, pourvû que ſa force centrifuge diminuât ou augmentât à proportion. D'où il eſt clair qu'elle tend à deſcendre vers le centre avec une force égale à la force centrifuge du volume de Fluide dont elle occupe la place.

Il eſt facile de déduire de ce que nous avons dit (*article* 61.) que dans un Fluide qui eſt en équilibre, s'il s'en durcit une partie quelconque, tout le reſte demeurant le même, cette partie reſtera en équilibre; mais comme la démonſtration que nous avons donnée de cette propoſition dans l'article cité, pourroit embarraſſer quelques Lecteurs, nous allons prouver ici de nouveau cette même vérité d'une maniere plus ſenſible & plus en détail.

1°. Soient $EF, AB, CD,$ (Figure 154.) &c. les couches de niveau du Fluide; $ABCD$ une portion de Fluide infiniment petite, renfermée entre deux couches de niveau infiniment proches & infiniment petites, $AB, CD,$ & entre deux lignes AC, BD perpendiculaires à ces couches. Comme la preſſion eſt égale à tous les points de $AB,$ on pourra prendre $\varphi . AB$ pour la preſſion ſur $AB,$ & $(\varphi + d\varphi) . CD$ ou $(\varphi + d\varphi) . [AB . (1 - \frac{BD}{BH})]$ pour la preſſion ſur CD qui agit en ſens contraire; de plus, les ſurfaces bD, AC ſont pouſſées ſuivant $OG, NG,$ avec une

force = à $\varphi . BD$, & la force qui en réſulte ſuivant HG eſt égale à $\varphi . \frac{BD \times AB}{BH}$; donc le ſolide $ABDC$ eſt pouſſé ſuivant AB par une force qui vient de ſon propre poids & qui eſt égale à $AB . d\varphi$; & il eſt en même-tems pouſſé ſuivant HG par une force égale à $\varphi . AB + d\varphi . AB - \varphi . AB \times \frac{BD}{BH} + \varphi . \frac{BD . AB}{BH} - \varphi . AB$. donc ce ſolide eſt en équilibre.

2°. Si les deux Arcs infiniment proches AB, CD n'étoient pas infiniment petits, tout ſeroit encore en équilibre. Car ſi on imaginoit, par exemple, à côté de $ABDC$, une autre petite maſſe ſolide $BbdD$, la preſſion de ces deux maſſes réunies enſemble, ne différeroit de celle qu'elles ſouffriroient étant ſéparées l'une de l'autre, qu'en ce que la preſſion en O ſuivant OG ſeroit anéantie, auſſi-bien que la force qui preſſeroit la maſſe $BbdD$ ſuivant GO : mais comme ces deux forces ſont contraires & égales, il eſt évident qu'en les ſuppoſant toutes deux exiſtantes, la maſſe $AbdC$ doit reſter dans le même état, & que chacune des deux maſſes dont elle eſt compoſée, ſera dans le même état auſſi, que ſi elle étoit ſéparée de l'autre. Donc chacune en particulier ſera en équilibre. Donc &c.

3°. Je dis préſentement qu'il n'eſt pas néceſſaire pour l'équilibre de la maſſe $AbdC$, que les lignes bd, AC ſoient perpendiculaires aux couches de niveau Ab, dC; car ſoit, par exemple, la maſſe $AbdQ$ terminée par la ligne

ligne AQ, il eſt aiſé de voir que la preſſion ſuivant $MG = \varphi . \frac{AQ \times AC}{AQ} = \varphi . AC$, & qu'ainſi elle eſt la même que ſur AC, de ſorte que la preſſion ſuivant HC eſt ſeulement augmentée d'une quantité égale à la moitié de $d\varphi . QC$, c'eſt-à-dire, au poids de AQC; & comme le poids de la maſſe $AbdC$ eſt augmentée de la même quantité, il s'enſuit &c. Il en ſeroit de même de l'autre côté bd.

4°. Si ſur le petit ſolide $AQdb$ formé de deux couches de niveau infiniment proches, & de deux autres lignes quelconques, on en imagine une autre, on prouvera que l'aſſemblage de ces deux ſolides eſt en équilibre, par un raiſonnement analogue à celui du *n.* 3 du préſent article; & ainſi de ſuite, quel que ſoit le nombre de petits ſolides poſés les uns ſur les autres, & formés par des portions de couches de niveau. Or un Corps de figure quelconque peut être regardé comme l'aſſemblage d'une infinité de ces petits ſolides. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

408. Si la maſſe du Corps eſt fort petite par rapport à celle du Fluide, on pourra ſuppoſer que la force centrifuge eſt conſtante dans toutes les parties du volume de Fluide dont le Corps occupe la place, & que la force qui en réſulte eſt égale à la ſomme des forces centrifuges de toutes les parties de ce volume de Fluide. Donc ſi on appelle f cette force centrifuge, & m la maſſe fluide

dont le Corps occupe la place, on pourra prendre f. *m* pour la force qui pouſſe le Corps vers le centre.

PROPOS. II.

409. *Dans un Tourbillon ſphérique ou ſphéroïde, la tendance des Corps qui y ſont plongés doit être vers l'Axe du Tourbillon, abſtraction faite de la peſanteur des parties.*

Cette propoſition eſt ſi claire & ſi ſimple par elle-même, qu'on ne ſauroit aſſez s'étonner, que preſque tous les Carthéſiens en ayent conteſté la vérité, & que d'autres, comme M. *Bulfinger*, ayent cru que l'Expérience étoit le ſeul moyen de la prouver. Je me contenterai donc de répondre ici aux objections de ces Auteurs, d'une maniere invincible & ſans réplique.

Les uns prétendent que la chûte d'un Corps *B* (Figure 155.) plongé dans un Tourbillon ſphérique doit ſe faire non vers l'Axe en *G*, mais vers le centre *C*, parce que le point *B* eſt preſſé par la colomne *GB*, non ſuivant *BG*, mais ſuivant *CB*. Pour ſentir l'abſurdité d'un pareil raiſonnement, il ſuffira de remarquer qu'il faudroit par la même raiſon, que dans un vaſe *MBD* (Fig. 156.) rempli d'une liqueur peſante, un Corps *B* ſuppoſé moins peſant qu'un pareil volume de Fluide, ne montât pas ſuivant *BG*, mais ſuivant *BC*, parce que l'action de la colomne *BG* eſt dirigée ſuivant *CB*; or l'Expérience fait voir que les Corps *B* ne montent pas ſuivant *BC*, mais verticalement ſuivant *BG*. La mépriſe de ces Auteurs vient de ce qu'ils ſe contentent de conſidérer l'effort de la colomne *BG*

ſuivant *BC* (Figure 155.) ſans faire d'attention à ſon effort ſuivant *BK*. Si on conſidere ce que produit ſur le point *B* chacune de ces deux forces, on verra qu'il eſt pouſſé à-la-fois ſuivant *BC* par l'action des colomnes voiſines, & ſuivant *BO* avec une force égale à l'excès de force du Canal *MAB* ſur le Canal *AD*, & que la ligne *BG* ſera la tendance qu'il aura en vertu de ces deux forces.

D'autres Auteurs diſent que l'action de la force centrifuge eſt naturellement dirigée vers *BC*, parce que la matiere qui décrit le parallèle *BG* ne le décrit que par un mouvement forcé, & qu'elle tend naturellement à décrire un grand Cercle. Mais il eſt aiſé de répondre à cette difficulté, en obſervant qu'une particule quelconque *A* (Fig. 157.) tend à chaque inſtant à décrire la tangente *AC*; que ſi elle étoit ſeule renfermée au-dedans du vaſe, elle décriroit le petit Arc *AD* d'un grand Cercle, & que ſa force centrifuge ſeroit exprimée par *DC*. Mais comme toutes les particules ſe nuiroient en décrivant de grands Cercles, il faut décompoſer la force ſuivant *AD* en deux autres ſuivant l'Arc du parallèle *AC*, & la petite ligne *BD*, de ſorte que la particule *A* animée des forces *BD*, & *DC* doit être en équilibre. Or la force qui réſulte de ces deux-là, eſt une force qui a ſa direction vers le centre du parallèle.

Donc de quelque maniere qu'on conſidere la choſe, on voit que la force du Tourbillon tend toujours à pouſſer les Corps vers l'Axe, & non vers le centre.

Remarque I.

410. Quand on ſuppoſeroit que les particules du Fluide fuſſent peſantes, la propoſition précédente ſeroit encore vraie, pourvû que le Corps fût de même peſanteur ſpécifique, que le Fluide. Dans tout autre cas, on cherchera la tendance du Corps vers l'Axe du Tourbillon en vertu de la force centrifuge, & ſa tendance verticale en haut ou en bas en vertu de la peſanteur du Fluide, & la réſultante de ces deux forces ſera le chemin du Corps.

Remarque II.

411. M. *Bulfinger* dans la Piéce qui a remporté le prix de l'Académie en 1728, a prétendu que dans un Tourbillon qui auroit à-la-fois deux mouvemens autour de deux Axes, la direction des Corps qui y ſeroient plongés devroit être vers le centre. Sa raiſon eſt, que chaque particule du Fluide décriroit alors un grand Cercle: mais il eſt aiſé de prouver que les courbes décrites par les particules ne ſont point de grands Cercles, mais des courbes différentes les unes des autres, dont la plûpart ſont en 8 de chiffre; d'où il s'enſuit que la direction des particules ne doit pas ſe faire vers le centre, puiſque ces courbes en 8 de chiffre, & autres, étant néceſſairement à double courbure, les perpendiculaires à ces courbes ne concourent pas au centre.

De la vîteſſe avec laquelle une maſſe circulaire plongée dans un Tourbillon peut tourner autour de ſon centre.

PROPOSITION I.

412. *Un Cercle très-petit* CAEB (Fig. 158.) *étant placé dans un Fluide homogene, dont les couches ſe meuvent circulairement avec une vîteſſe proportionnelle à une fonction quelconque de leurs rayons ; ſi la vîteſſe du centre* C *eſt la même que celle du filet* DC; *je dis*

1°. *Que le Cercle* CAEB *ſe mouvra ſenſiblement dans le même Cercle que le filet* DC.

2°. *Que ſi la vîteſſe des couches eſt proportionnelle à une puiſſance* m *de la diſtance, il fera* $\frac{m}{2}$ *révolutions autour de ſon centre, pendant qu'il en fera une autour du point* G, *& cela ſuivant* BDA *ou* ABD, *ſelon que le nombre* m *ſera poſitif ou négatif.*

Car en premier lieu, les forces centrifuges du Cercle *CAB* & d'un volume de Fluide égal à celui dont il tient la place, peuvent paſſer pour égales, puiſqu'elles ne different l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles.

En ſecond lieu, ſi on prend les Arcs *DE*, *De*, (Figure 159.) égaux entr'eux, & qu'on ſuppoſe que la vîteſſe des couches aille en augmentant de *B* vers *A*, l'excès de vîteſſe du filet *EP* ſur le filet *DC* ſera égal, comme il eſt aiſé de le voir, à l'excès de vîteſſe du filet *DC* ſur le filet *ee* : donc les points *E*, *e*, ſeront également

pouſſés, l'un ſuivant EC, l'autre ſuivant eC, & par conſéquent le Fluide ne fera aucune réſiſtance au mouvement du Cercle.

En troiſiéme lieu, ſi on décompoſe la vîteſſe reſpective OE en deux autres, l'une ſuivant EC, l'autre ſuivant EK, & qu'on faſſe de même pour tous les autres points, il eſt viſible que l'action du Fluide ſuivant EK tend à faire tourner le Cercle dans le même ſens autour de ſon centre. Pour déterminer la vîteſſe avec laquelle il doit tourner, je ſuppoſe qu'il ait déja acquis une certaine vîteſſe de rotation, & que le point α ſoit tel que la vîteſſe ſuivant αV ſoit égale à cette vîteſſe de rotation; il eſt viſible que le Fluide ayant plus de vîteſſe depuis α juſqu'en A, & moins depuis α juſqu'en D, que n'en a le point α, l'action du Fluide tendra à accélérer la partie αA, & à retarder au contraire la partie αD; & le Cercle n'aura acquis une vîteſſe conſtante de rotation, que quand ces deux efforts ſeront égaux. Or je dis qu'ils ſeront égaux, ſi le point α eſt celui de 45 degrés. Car ſoit g la vîteſſe du filet CD, CG, r, CD, a, la vîteſſe reſpective en α ſuivant $\alpha\mathcal{C}$, ſera $= \frac{mg.C\mathcal{C}}{CG}$, & la vîteſſe ſuivant $\alpha V = \frac{mg.C\mathcal{C}^2}{CG.CD} = \frac{mga}{2r}$. Or ſi on prend les points E, S, également éloignés de α, on trouvera que la vîteſſe du point E du Fluide ſuivant EK, eſt $\frac{mg.CP^2}{CG.CD}$, & qu'ainſi la force qui pouſſe le point E ſuivant EK, eſt égale à une fonction

de $\frac{mg.CP^2 - mg.C\mathcal{C}^2}{CG.CD}$, & que la force qui pouſſe le point S en ſens contraire, eſt égale à une pareille fonction de $\frac{mg.C\mathcal{C}^2 - mg.Cp^2}{CG.CD}$. Or ces deux fonctions ſont égales, puiſque $CP^2 + Cp^2 = CD^2$, & que par conſéquent $CP^2 - C\mathcal{C}^2 = C\mathcal{C}^2 - Cp^2$. Donc &c.

Donc la vîteſſe du Cercle pour tourner autour de ſon centre eſt $\frac{mga}{2r}$, & par conſéquent le tems d'une rotation eſt au tems d'une révolution autour du centre G, comme $\frac{2ra}{mga}$ eſt à $\frac{r}{g}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{2}{m}$ eſt à 1. Donc il fera $\frac{m}{2}$ rotations autour de ſon centre, pendant qu'il en fera une autour du centre G.

REMARQUE I.

413. Je n'ai eu aucun égard dans la propoſition précédente à la quantité de preſſion en E & en S, pour déterminer l'action du Fluide; qui par ſon frottement accélere ou retarde le mouvement de rotation. Car 1°. la preſſion du point E réſultante de la vîteſſe ſuivant EC, eſt égale à la preſſion du point S réſultante de la vîteſſe ſuivant SC, puiſqu'il eſt aiſé de faire voir que ces vîteſſes ſont repréſentées par les lignes égales PZ, pz. 2°. A l'égard de la preſſion des points E, S, réſultante de la force centrifuge du Fluide environnant, ces deux preſſions ſont encore égales entr'elles, ou au moins diffe-

rent ſi peu l'une de l'autre, qu'elles doivent paſſer pour égales.

REMARQUE II.

414. Ce que nous venons de dire (*article* 412.) s'applique auſſi à une Sphere qui ſeroit plongée dans le même Tourbillon; car ſoit KSR (Fig. 160.) un grand Cercle dont le plan paſſe par le centre, & QCO, un des parallèles; ſi on décompoſe la vîteſſe reſpective DQ en deux autres dans le plan du Cercle QCO, ſuivant QC & ſuivant QN, il eſt clair que l'effort ſuivant QC eſt entiérement ſoutenu par un effort égal & contraire ſuivant qC, & qu'on ne doit avoir égard qu'à la vîteſſe ſuivant QN; or cela poſé, on verra aiſément par la démonſtration précédente (*art.* 412.) que chacun des Cercles KSR, QCO parvenu à une vîteſſe de rotation conſtante, fera $\frac{m}{2}$ révolutions autour de ſon centre, pendant que le centre C de la Sphere en fera une autour de G. Donc &c.

REMARQUE III.

415. Pour déterminer la force qui anime à chaque inſtant la maſſe circulaire, & la ſollicite à tourner autour de ſon centre, & trouver par-là les accroiſſemens infiniment petits de la vîteſſe de rotation à chaque inſtant; on nommera CP, x, (Fig. 159.) la vîteſſe de rotation u, & l'on aura $\int\left(\frac{adx}{\sqrt{[aa-xx]}} \times 2\varphi\left[\frac{mgxx}{ar} - u\right]\right)$ pour la force qui

qui anime la masse à tourner à chaque instant. On intégrera cette quantité en ne faisant varier que x, & faisant $x = a$, on aura l'intégrale complette : ensuite si on nomme s l'espace qu'un point quelconque E a parcouru en tournant autour du centre C, on fera la force totale égale à $\frac{u\,du}{ds}$.

Si on suppose que la force qui agit à chaque point E soit proportionnelle à la vîtesse, l'expression précédente deviendra $2\int([\frac{gmxx}{ar} - u] \cdot \frac{a\,dx}{\sqrt{[aa - xx]}})$, dont l'intégrale est $-\frac{2mg \cdot ACD}{r} + \frac{2mg}{r} \times AC \cdot ASD - 2u \cdot ASD = 4ASD \times (\frac{gma}{4r} - \frac{u}{2})$. D'où l'on voit que dans cette hypothèse la force qui anime la masse AQD à tourner autour de son centre, est la moitié de celle qui animeroit cette même masse à tourner autour de son centre, si elle étoit au centre d'un Tourbillon dont la couche contigue à la surface du Cercle AQD seroit mûe avec une vîtesse constante $= \frac{gma}{2r}$; & que la vîtesse de rotation sera dans l'un & l'autre cas $\frac{gma}{2r}$, avec cette différence que dans le premier cas elle ne sera engendrée qu'après un tems double de celui pendant lequel elle seroit engendrée dans le second cas.

Au reste, l'hypothèse que la force accélératrice soit proportionnelle à la vîtesse simple, ne doit pas être prise

à la rigueur; autrement, la masse circulaire $AQBD$ ne parviendroit à une vîtesse constante de rotation qu'après un tems infini; ce qui est contre l'Expérience.

REMARQUE IV.

416. En général, quelle que soit la vîtesse du centre C par rapport au filet DC, si le Cercle a autour de son centre une vîtesse égale à $\frac{mga}{2r}$, & qu'on suppose la force du frottement proportionnelle à la simple vîtesse, on peut démontrer aisément que l'action du Fluide pour accélérer ou retarder le mouvement de rotation, est nulle; car soit g la vîtesse du centre C, & on trouvera que la vîtesse du Fluide suivant EK est $(g+\frac{mg.CP}{CG}-g)\times\frac{CP}{CD}$, & prenant $C\pi=CP$, on aura la vîtesse suivant $ek=(g-\frac{mg.C\pi}{CG}-g)\times\frac{C\pi}{CD}$: si on retranche de l'une de ces deux vîtesses la vîtesse de rotation $\frac{mga}{2r}$, & qu'on l'ajoute à l'autre, qu'ensuite on prenne la différence des deux, on aura $2(\frac{mg.CP^2}{CG.CD}-\frac{mga}{2r})$ pour la force qui tend à accélérer le point E, ce qui est précisément la même chose que dans l'*article* 412.

Nous avons supposé que le Fluide en e allât plus vîte que le Cercle. S'il alloit plus lentement, il est clair que ce seroit le point e qui seroit frappé, la vîtesse suivant

ek étant $(g - g + \frac{mg.C\pi}{CG}) \times \frac{C\pi}{CD}$, & que l'action suivant ek devroit alors s'ajouter à l'action suivant EK; ce qui ne changeroit rien aux calculs précédens.

Tout ce que nous venons de dire eſt encore vrai pour la Sphere, comme on le peut voir aiſément.

Remarque V.

417. Si dans le cas de l'*article* 412, on ſuppoſe que le Fluide ne ſoit pas uniforme, mais que ſa denſité, par exemple, aille en diminuant de A vers B, alors il eſt viſible que le point E ſera frappé ſuivant EC avec plus de force que le point e n'eſt frappé ſuivant eC: qu'ainſi le Cercle QDA ne peut plus ſe mouvoir circulairement autour du centre G, à moins qu'on ne ſuppoſe 1°. que le point C ait plus de vîteſſe que le filet DC. 2°. Que cette vîteſſe ſoit telle, qu'en décompoſant chaque effort ſuivant EC en deux autres, l'un ſuivant CB, l'autre ſuivant CQ, la ſomme des efforts ſuivant CQ ſoit nulle, & que la ſomme des efforts ſuivant CB retranchée ou ajoutée à la force centrifuge du Cercle, ſoit égale à la force centrifuge d'un égal volume de Fluide placé à la diſtance CG du centre G.

Soit $CK = \alpha$ (Fig. 161.) l'abſciſſe qui répond au point L où la vîteſſe du Fluide eſt égale à celle du centre C; $g + \frac{mg\alpha}{r}$ ſera la vîteſſe du centre C ſuivant CQ, & la ſomme des efforts ſuivant CQ réſultans de la réſiſtance faite à l'Arc LM ſera $ff(\frac{mgx - mg\alpha}{r})^2 \times \frac{dx.(aa - xx)}{a^3} \times$

$([\varpi + \frac{\varpi n x}{r}])$, dans laquelle la quantité $\varpi + \frac{\varpi n x}{r}$ eſt proportionnelle à la denſité, parce qu'on ſuppoſe que la denſité du filet qui répond à C ſoit ϖ, & que la denſité augmente en raiſon des puiſſances n des diſtances au centre. On cherchera de même l'effort ſuivant QC réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc λN, & on ſuppoſera que cet effort ajouté avec celui qui vient de la réſiſtance faite à l'Arc LM, ſoit égal à zero.

Maintenant ſi on ſuppoſe que Δ ſoit la denſité du Cercle, ſa force centrifuge ſera $(gg + \frac{2mgg\alpha}{r}) \times \Delta$, & cette force étant ajoutée à l'effort ſuivant CM réſultant de la réſiſtance du Fluide aux Arcs ML, λN, il faudra ſuppoſer la ſomme de ces efforts égale à la force centrifuge ϖgg du Fluide.

On aura donc deux Equations par le moyen deſquelles on déterminera deux quelconques des quatre quantités ϖ, Δ, α, & n, les deux autres étant données.

Pour trouver avec quelle vîteſſe le Cercle doit tourner ſur ſon centre, on nommera u ſa vîteſſe de rotation dans un inſtant quelconque, & on obſervera que la force qui ſollicite un de ſes points quelconques à tourner, eſt $[\frac{gmx - gm\alpha}{r} \times \frac{x}{a} - u] \cdot \frac{adx}{\sqrt{[aa - xx]}} \times (\varpi + \frac{\varpi n x}{r})$. On intégrera cette quantité en ne faiſant varier que x, & après avoir completté l'intégrale qui doit être zero, lorſque $x = \alpha$, on ſuppoſera cette intégrale $= 0$ lorſque $x = a$, ce qui donnera la vîteſſe de rotation cherchée. Car la

vîteſſe de rotation commence à être conſtante dans l'inſtant où la force qui la produit eſt nulle.

REMARQUE VI.

418. Nous avons déterminé dans l'*art.* 412, quelle doit être la vîteſſe de rotation conſtante du Cercle, pour que la vîteſſe reſpective du Fluide tende également à accélérer & à retarder ce mouvement de rotation : il y a encore un autre cas où le Cercle conſerveroit une vîteſſe de rotation conſtante, c'eſt celui où la vîteſſe reſpective de chaque filet du Fluide OE (Fig. 159.) ſeroit nulle.

Pour trouver quelle doit être alors la vîteſſe de rotation, nous nommerons u cette vîteſſe, g la vîteſſe du centre C (Fig. 158), g la viteſſe du filet circulaire dont le rayon eſt CG : la vîteſſe du filet dont le rayon eſt GE, ſera $\frac{g\times(rr+2rx+aa)^{\frac{m}{2}}}{r^m}$; la vîteſſe qui en réſulte ſuivant $EP=\frac{g.(r+x).(rr+2rx+aa)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m}$; & la vîteſſe qui en réſulte ſuivant $EN=\frac{g\sqrt{(aa-xx)}.(rr+2rx+aa)^{\frac{m-1}{2}}}{r^m}$.

Préſentement, la vîteſſe du point E du Cercle ſuivant EP, réſultante de la vîteſſe u combinée avec ſon mouvement progreſſif, eſt $g+\frac{ux}{a}$; & la vîteſſe ſuivant $EN=\frac{u\sqrt{[aa-xx]}}{a}$. Il faut que les vîteſſes du Fluide & du Corps ſuivant EP & EN, ſoient égales, quelque valeur

qu'on donne à x. D'où l'on tire en ſuppoſant a infiniment petite, 1°. $g = g$; 2°. $u = \frac{ga}{r} + \frac{ga \times (m-1).r^{m-2}}{r^{m-1}} = \frac{mga}{r}$; 3°. $u = \frac{ga}{r}$.

De-là il s'enſuit, qu'en ſuppoſant même a infiniment petite par rapport à r, il n'y a qu'un ſeul cas où l'on puiſſe trouver dans l'hypothèſe préſente une vîteſſe conſtante de rotation; ſavoir, celui où $m = 1$, c'eſt-à-dire, où toutes les couches font leur révolution en même-tems. Dans ce cas, la vîteſſe conſtante de rotation eſt double de celle qu'on a trouvée (*article* 412.)

Non-ſeulement il n'y a qu'un cas où l'on puiſſe trouver une vîteſſe de rotation conſtante dans l'hypothèſe que la vîteſſe reſpective du Fluide ſoit nulle, mais encore il eſt néceſſaire pour que le Cercle ait cette vîteſſe, qu'elle lui ait été imprimée au commencement de ſon mouvement ſans que le Fluide y ait contribué. Car ſi on n'imprime au Cercle aucune vîteſſe de rotation, mais ſimplement la vîteſſe progreſſive g, l'action du Fluide tendra toujours à lui imprimer une vîteſſe de rotation telle qu'elle a été déterminée dans l'*article* 412.

On peut donc conclure de-là, que le Cercle n'aura la vîteſſe de rotation $\frac{mga}{r}$ en vertu de l'action du Fluide, que quand les particules du Fluide feront toutes leur révolution en même-tems, & qu'outre cela elles auront entr'elles un certain degré de tenacité, qui les empêchera

de pouvoir couler librement sur la surface *A*D*Q* suivant *EK*, & de produire par ce mouvement la vîtesse de rotation $\frac{mga}{2r}$.

Remarque VII.

419. M. *de Mairan* dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'*Acad.* de 1729, a tenté d'expliquer par les Tourbillons la rotation des Planetes. Selon lui, l'Hemisphere inférieur d'une Planete, celui qui est le plus près du centre du Tourbillon, est plus pesant que l'Hemisphere supérieur; cela posé, M. *de Mairan* prétend que l'impulsion relative du Fluide contre l'Hemisphere supérieur, sera plus grande que son impulsion contre l'Hemisphere inférieur; cet Hemisphere sera donc plus de chemin à proportion que l'autre, d'où il s'ensuit que la Planete tournera sur son Axe d'Occident en Orient, dans le même sens qu'elle tourne autour du Soleil.

Quelqu'ingénieuse que puisse paroître cette explication, je crois qu'on aura lieu de douter qu'elle soit solide, si on l'examine suivant les Principes de la Méchanique. En effet, c'est une vérité inconteſtable, que *si tant de forces qu'on voudra agissent sur un Corps, & que la direction de la force résultante du concours d'action de ces forces passe par le centre de masse du Corps, ce Corps se mouvra en ligne droite sans tourner autour de son centre.* * Cela posé, je dis que dans les Principes même de M. *de Mai-*

* Voyez le *Traité de Dynamique*, seconde Partie, Ch. II.

ran, la Planete ne doit point tourner ſur ſon centre. Car imaginons pour un moment que les deux Hemiſpheres de la Planete ſoient dénués de leurs peſanteurs ; comme l'inégalité de la peſanteur eſt la ſeule cauſe d'où M. *de Mairan* déduit la rotation, on doit conclure que la Planete devroit alors ne pas tourner ſon centre. Remettons maintenant la Planete dans ſon état de peſanteur naturelle, je dis qu'elle n'en tournera pas plus pour cela. Car 1°. on ne peut pas dire que les deux Hemiſpheres ſoient inégalement peſans, quoique le Fluide inférieur ait plus de force centrifuge que le Fluide ſupérieur, parce que l'action du Fluide ſe fait ſuivant des lignes perpendiculaires à la ſurface du Globe, & que toutes ces perpendiculaires concourent au centre. 2. Quand bien même on ſuppoſeroit que chaque partie de l'Hemiſphere inférieur peſât vers le Soleil avec plus de force que les parties de l'Hemiſphere ſupérieur, il eſt conſtant que toutes les parties également éloignées du centre peſeroient également, qu'ainſi la force réſultante de toutes ces peſanteurs paſſeroit toujours par le centre de maſſe du Corps. Il me ſemble que ce qui a trompé M. *de Mairan*, c'eſt qu'il a imaginé que les deux Hemiſpheres, ſuppoſés d'une peſanteur inégale, étoient dans le même cas, que ſi, ayant une égale peſanteur, l'inférieur étoit plus denſe que le ſupérieur. Ce qui eſt néanmoins fort différent, puiſque dans le premier cas le centre de maſſe ne change point, & qu'il change dans le ſecond.

M. *Bernoulli* va encore beaucoup plus loin dans ſa

nouvelle

nouvelle Phyſique Céleſte qui a partagé le prix de l'Académie en 1734; car après avoir fait pluſieurs objections contre la Théorie de M. *de Mairan*, fort différentes de celles que nous venons de propoſer : il finit ces obſervations par dire, qu'*il ſera bien ſurpris quand il apprendra*, qu'un Globe creux, chargé de Mercure dans ſa partie inférieure, & expoſé au courant d'un Fluide, tournera autour de ſon centre.

Du mouvement non circulaire d'une Sphere dans un Tourbillon.

PROPOSITION I.

420. *Un Globe très-petit étant plongé dans un Fluide qui ſe meut en Tourbillon, l'impulſion qu'il reçoit de la force centrifuge du Fluide eſt à celle qu'il reçoit de la vîteſſe actuelle du même Fluide, comme les* $\frac{8}{3}$ *du diametre du Globe, eſt à ſa diſtance au centre du Tourbillon.*

Soit u la vîteſſe du Fluide, F la force réſultante de l'impulſion, f la force centrifuge d'un volume de Fluide égal au Globe, & δ le diametre du Globe, on aura par la Propoſ. 38. l. II. des Principes de M. *Newton*, $uu = \frac{8F\delta}{3}$. Mais ſi on nomme x la diſtance du Globe au centre du Tourbillon, on a $uu = fx$. donc $f : F :: \frac{8}{3}\delta : x$.

Si le Fluide n'eſt pas de la même denſité que le Globe, l'analogie précédente eſt encore vraie, puiſque la force

de l'impulſion du Fluide & la force centrifuge ſont toujours proportionnelles à la denſité.

M. *Daniel Bernoulli* a démontré cette même Propoſition. *Tome II. des Mém. de Peterſbourg.*

REMARQUE.

421. On a ſuppoſé dans la Propoſition précédente, que la force de l'impulſion du Fluide étoit comme le quarré de ſa vîteſſe; mais ſi on veut qu'elle ſoit comme une puiſſance quelconque n de la vîteſſe, en ce cas, on ſuppoſera que F, ϕ ſoient les réſiſtances que feroit le Fluide à une même vîteſſe donnée g; la premiere, dans le cas de $n = 2$; la ſeconde, dans le cas de $n =$ à un nombre quelconque : on aura $F = \frac{Fuu}{gg}$; & la réſiſtance pour la vîteſſe u dans le cas de $n =$ à un nombre quelconque, ſera $\frac{\phi u^n}{g^n}$. Donc ſi on nomme π cette réſiſtance, on aura $F = \frac{Fuu}{gg} = \frac{Fuu}{gg} \times \frac{\pi g^n}{u^n \phi}$. donc f : π :: $\frac{8}{3}\delta$: $\frac{\phi u^{n-2}}{Fg^{n-2}} x$: donc ſi on regarde la quantité g, & par conſéquent les quantités F, ϕ, comme finies, & qu'on ſuppoſe x infiniment grande par rapport à δ, il eſt évident que le rapport de f à π ſera fini, ou infiniment petit, ou infiniment grand, ſelon que le rapport de $u^{n-2} x$ à $g^{n-2} \delta$ ſera fini, ou infiniment petit, ou infiniment grand.

Donc ſi $n > 2$, il faut que la vîteſſe u ſoit infiniment petite, pour que le rapport des deux forces ſoit fini.

PROPOS. II.

422. *Trouver l'intégrale de* $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+q]}}$, e *exprimant une conſtante, &* q *une très-petite fonction de* t.

Soit $AP=t$ (Figure 162.) : du rayon e ſoit décrit le demi-Cercle AMO, dont l'Ordonnée $PM=\sqrt{[2et-tt]}$, & ſoit $Pm=\sqrt{[2et-tt+q]}$. La queſtion ſe réduit à trouver la ſomme des $\frac{Pp}{Pm}$: or $\frac{Pp}{Pm}=\frac{m\mu}{mK}=\frac{m\mu}{mT-TK}=\frac{m\mu}{mT}+\frac{m\mu.TK}{mT.(mT-TK)}=\frac{m\mu}{mT}+\frac{Ki}{mK}$, dont l'intégrale eſt l'angle AKm, plus la ſomme des Ki diviſés par la ligne mK, qui peut paſſer pour conſtante & égale au rayon e. Or $Ki=\frac{Kk.Pm}{mK}=\frac{\sqrt{[2et-tt]}}{e}\times d\left(\frac{dq}{2dt}\right)$; donc ſi on fait $dq=ndt$, on aura l'intégrale cherchée égale à l'angle $AKm+\int\frac{dn.\sqrt{[2et-tt]}}{2ee}$.

COROLLAIRE I.

423. Soit $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+ptt]}}$, p exprimant un nombre très-petit. Si on appelle l'angle droit A, & qu'on mette cette quantité ſous la forme ſuivante $\frac{dt}{\sqrt{[1-p]}\cdot\sqrt{\left[\frac{2et}{1-p}-tt\right]}}$, on trouvera que l'intégrale complette, eſt $\frac{2A}{\sqrt{[1-p]}}=$

$2A.(1+\frac{p}{2})$. En ſuivant la méthode précédente, on trouve $n = 2t$, & l'intégrale complette $= 2A + \int \frac{dt\sqrt{[2et-tt]}}{ee} = 2A + pA$, ce qui revient au même.

REMARQUE.

424. Si on ſuivoit la méthode qui ſe préſente naturellement pour trouver l'intégrale de $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+ptt]}}$, on ſuppoſeroit cette différentielle égale à $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt]}} = \frac{ptdt}{2.(2et-tt)^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eſt $2A + pA - \int \frac{petdt}{(2et-tt)^{\frac{1}{2}}}$. Or cette derniere quantité affectée du ſigne $\int$ ne devient point $= 0$, lorſque $t = 2e$. D'où l'on voit que l'intégrale priſe ſuivant cette Méthode, n'eſt point exacte. L'erreur vient de ce qu'en ſuivant cette Méthode, on ſuppoſe que ptt eſt toujours infiniment petite par rapport à $2et - tt$. Or lorſque t eſt preſque égal à $2e$, non-ſeulement ptt n'eſt plus infiniment petite par rapport à $2et-tt$, mais encore elle peut être infiniment plus grande. Cette maniere de prendre l'intégrale ne ſauroit donc s'étendre que juſqu'à un certain point Q placé à une diſtance finie, mais très-petite du point B : de ſorte qu'on ne ſauroit ſuppoſer $t = 2e$ dans l'intégrale, ſans négliger l'angle infiniment petit RCB qui doit y entrer, & auquel il n'eſt pas permis de n'avoir point d'égard, parce que l'intégrale cher-

chée ne differe de $2A$ que d'une quantité infiniment petite du même ordre que cet angle RCB.

COROL. II.

425. L'intégrale exacte de $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+q]}}$, en prenant pour Ki & mK leurs valeurs rigoureuſes, & faiſant $dn = n\,dt$, eſt $2A + \int \frac{n\,dt\sqrt{[2et-tt+q]}}{2(ee+\frac{nn}{2}+q)}$. Si on veut pouſſer la préciſion juſqu'aux ſecondes différences, on changera la quantité précédente, qui eſt ſous le ſigne $\int$, en $\int \frac{n\,dt\sqrt{[2et-tt+q]}}{2ee} - \int([\frac{nn}{2}+q]\cdot\frac{n\,dt\sqrt{[2et-tt]}}{2e^4})$.

Pour avoir l'intégrale de la premiere de ces deux quantités, on peut ſuppoſer ici $\sqrt{[2et-tt+q]} = \sqrt{[2et-tt]} + \frac{q}{2(2et-tt)^{\frac{1}{2}}}$. Il eſt bien vrai que cette ſuppoſition n'eſt légitime, que tant que t n'eſt pas infiniment peu différente de $2e$. Mais lorſque t differe infiniment peu de $2e$, on peut prendre l'intégrale pour ce qu'elle eſt, lorſque $t = 2e$. Car il n'en eſt pas ici comme dans l'*art.* 424, ou en faiſant cette ſuppoſition, on négligeoit des quantités auxquelles il falloit avoir égard. Les quantités qu'on négligera ici, ſeront de l'eſpéce de KOQ, c'eſt-à-dire, infiniment petites du troiſiéme ordre.

Si cependant quelqu'un avoit du ſcrupule ſur cette Méthode, en ce cas il pourroit y ſubſtituer la ſuivante. On ſuppoſera $2et - tt + q = 0$, & on trouvera une

valeur de t infiniment peu différente de $2e$, que j'appellerai $2e+\alpha$. Enſuite, on ſuppoſera $\sqrt{[2et-tt+q]} = \sqrt{[(2e+\alpha)t-tt+q-\alpha t]}$: or lorſque $t=2e$, la quantité $q-\alpha t$ eſt infiniment petite du ſecond ordre, étant la différence infiniment petite de deux quantités infiniment petites du premier; car α eſt égal (à un infiniment petit du ſecond ordre près) à ce que devient la quantité $\frac{q}{2e}$ lorſque $t=2e$. Donc on pourra ſuppoſer le ſecond membre de la quantité précédente, égal à $\sqrt{[(2e+\alpha)t-tt]} + \frac{q-\alpha t}{2\sqrt{[(2e+\alpha)t-tt]}}$, ſans avoir aucune erreur à craindre.

On trouvera dans l'*art.* 273 du ſecond Volume de nos *Recherches ſur le ſyſtême du monde*, une autre maniere encore plus ſimple de trouver l'intégrale de $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+q]}}$ lorſque $\sqrt{[2et-tt+q]}=0$; voici en peu de mots l'eſprit de cette Méthode. Soit $t=2M$ lorſque $2et-tt+q=0$, on fera $\sqrt{[2et-tt+q]} = \sqrt{[2M-t]} \times \sqrt{[\alpha+\zeta t]} \times \sqrt{[A+\varphi t]}$; φt étant une fonction de t beaucoup plus petite que A, & on aura $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+q]}} = \frac{dt}{\sqrt{[\gamma+\delta t+\varepsilon tt]}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{[A]}} - \frac{\varphi t}{2A\sqrt{A}} - \&c.\right)$ dont l'intégrale ſe trouvera aiſément par les quadratures; la fonction φt ſe déterminera par l'Equation $2et-tt+q = (\gamma+\delta t+\varepsilon tt)(A+\varphi t)$; d'où l'on tire $\frac{(2e-\delta A)t-tt(1+\varepsilon A)+q-\gamma A}{\gamma+\delta t+\varepsilon tt} = \varphi t.$

PROPOS. III.

426. *Une très-petite Sphere* A (Fig. 163.) *étant pouſſée ſuivant une direction quelconque* A L *dans un milieu compoſé de couches circulaires concentriques & de denſité variable, mues autour de leur centre commun* C, *trouver la courbe* A O B *que cette Sphere doit y décrire, en ſuppoſant que les aires* C O N *parcourues à chaque inſtant par ſon rayon vecteur* C O *ſoient proportionnelles aux tems employés à les parcourir.*

Pour que les Aires ou Secteurs *C O N* ſoient proportionnels aux tems, il faut, comme l'a démontré M. *Newton*, que la force qui contraint le mobile de circuler ſur l'Orbite *A O B* ſoit continuellement dirigée vers le centre *C*. Or 1°. la force centripéte du mobile, qui réſulte de la force centrifuge du Tourbillon, eſt toujours dirigée vers le centre *C*. 2°. Si ſur le petit Arc *O M* on prend *O M* à *O N*, comme la vîteſſe du Fluide ſuivant *O M* eſt à celle du mobile ſuivant *O N*, la ligne *N M* ſera (*art.* 348.) la direction de l'effort réſultant de la réſiſtance du Fluide. Donc cette ligne *N M* doit être parallèle à *O C*: donc abaiſſant du centre *C* la perpendiculaire *C Z* ſur la tangente *O Q*, on aura $OM : ON :: CQ : CO :: \frac{I}{CO} : \frac{I}{CQ}$. Donc la vîteſſe du Fluide doit être à celle du mobile, comme $\frac{I}{CO}$ à $\frac{I}{CQ}$: & comme la vîteſſe du mobile eſt dans tous les points *O* de l'Orbite proportionnelle à $\frac{I}{CQ}$, il s'en-

ſuit que la vîteſſe de chaque couche circulaire doit être comme $\frac{I}{CO}$, c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe du rayon.

Donc la vîteſſe initiale imprimée à la Sphere ſuivant AL doit être à la vîteſſe de la couche circulaire dont le rayon eſt CA, comme le Sinus total eſt au Sinus de l'angle CAL, & par conſéquent ces vîteſſes doivent être égales, ſi l'angle CAL eſt droit.

Soit à préſent a le rayon de la couche circulaire dont la denſité eſt égale à celle de la Sphere, f la force centrifuge d'un volume de matiere de cette couche, égal au rayon de la Sphere, f l'action que ce même Fluide exerceroit contre la Sphere, s'il la frappoit avec une vîteſſe g, & s'il étoit d'une denſité égale à celle de la couche dont le rayon eſt a. Nommons enſuite OC, x, MN, dx, OM, $dy = \frac{z\,dx}{a}$, CZ, p; enfin ſuppoſons que les denſités varient comme une fonction Ψx des diſtances, & que la réſiſtance ſoit comme une fonction quelconque de la vîteſſe. Si on ſe ſert du Principe ordinaire des forces accélératrices, & qu'on remarque que la vîteſſe u du mobile en un point quelconque O, eſt $\frac{g\,a}{p}$, ou $\frac{g\,a\sqrt{[(aa+zz)]}}{xz}$, & que $gg = \frac{fa}{m}$ *, on aura l'Equation ſuivante

$$\frac{fa^3\,dx\,\Psi x}{\Psi a\,.\,x^3} - \frac{f\,dx\,\Psi x}{\Phi g\,\Psi a} \times \Phi\left(\frac{gaa}{xz}\right) = -\frac{fa}{2}\,.\,d\left(\frac{a^4}{xxzz} + \frac{aa}{xx}\right) \ldots (I).$$

* *Hugh. de vi centrifugâ. Theor. 5.*

COROLLAIRE I.

COROLLAIRE I.

427. Cette Equation eſt conſtructible en pluſieurs cas, par exemple, ſi $\Psi x = \Psi a$, c'eſt-à-dire, ſi la denſité eſt conſtante, quelle que ſoit d'ailleurs la fonction φ.

COROL. II.

428. Si on ſuppoſe non-ſeulement la denſité conſtante, mais encore la réſiſtance comme une puiſſance de la vîteſſe, & que $x = b$ & $z = h$ au commmencement du mouvement, on aura

$$\frac{f(x-b).(2-n)}{fa} = \frac{a^{2(2-n)}}{(zx)^{2-n}} - \frac{a^{2(2-n)}}{(bh)^{2-n}};$$

d'où l'on voit que ſi $n = 3$, & que le mobile monte, la courbe ſera une *ſpirale Logarithmique* en certains cas. Car la réſiſtance s'ajoutant alors à la force centrifuge, on aura $\frac{f(x-b)}{fa} = \frac{xz-bh}{aa}$: donc ſi $\frac{f}{f} = \frac{a}{h}$, on aura $z = h$.

Il faut cependant remarquer, que pour que le mobile décrive une telle ſpirale, il eſt néceſſaire, non-ſeulement que le mobile s'éloigne du centre du Tourbillon, & que $\frac{f}{f} = \frac{a}{h}$, il faut encore que la vîteſſe du Tourbillon ſoit très-petite. Car comme par l'Equation $\frac{f}{f} = \frac{a}{h}$, le rapport de f à f doit être fini, & que le mobile eſt ſuppoſé infiniment petit, il s'enſuit que la vîteſſe du Tourbillon doit être infiniment petite (*article* 421.).

PROPOS. IV.

429. *Trouver le mouvement des apſides dans l'hypothèſe que la réſiſtance du Fluide ſoit comme le quarré de la viteſſe, & que l'Orbite differe infiniment peu d'un Cercle.*

1°. Si la denſité eſt conſtante, c'eſt-à-dire, ſi $\Psi x = \Psi a$, il eſt aiſé de voir qu'on aura $\frac{a^4}{xx\zeta\zeta} \cdot c^{-2f(x-b):fa}$ égale à une conſtante, & qu'il n'y aura point pour lors d'apſides dans l'Orbite, parce que ζ ne ſera jamais infinie.

2°. Si la denſité des couches eſt variable, & qu'on ſuppoſe l'Orbite preſque circulaire, il eſt clair que x devra différer infiniment peu de a; car la Sphere devra être placée à une diſtance très-petite de la couche où le Fluide a la même denſité qu'elle. Suppoſons donc que la valeur de x à l'origine de la courbe ſoit $a+e$, & que ſa valeur générale ſoit $a+e-t$, e & t étant des quantités très-petites; & imaginons que $\Psi x = \Psi a + r.(e-t) \times A + s.(e-t)^2.A$, on aura $\zeta\zeta = a^4.c^{2ft:fa}$ diviſé par $(a+e-t)^2 \times \int [\frac{-2aadt}{(a+e-t)^3} \times (\frac{-r.(e-t)A}{\Psi a} - \frac{s.(e-t)^2 A}{\Psi a}) \times c^{2ft:fa}]$.

J'ai pouſſé la préciſion juſqu'aux quantités infiniment petites du ſecond ordre dans la valeur de Ψx, parce que cette préciſion eſt néceſſaire dans le cas où $c^{2ft:fa}$ eſt infiniment peu différente de l'unité.

Lorſque t n'eſt pas aſſez petite par rapport à $\frac{fa}{f}$ pour que

l'on puiſſe ſuppoſer $c^{2ft:fa} = 1$, alors on trouvera après en avoir fait le calcul, que la connoiſſance du mouvement des apſides dépend de l'intégration d'une quantité de la forme ſuivante $dt : \sqrt{(\alpha[1 - e^{nt}] - t)}$, dans laquelle α & n ſont des conſtantes.

Si t eſt aſſez petite pour qu'on puiſſe ſuppoſer $c^{2ft:fa} = 1 + \frac{2ft}{fa}$, alors on trouvera après en avoir fait le calcul par la Méthode expliquée dans l'*art.* 422, & en ſuppoſant $\Psi x = x^n$, que la diſtance d'une apſide à l'autre eſt égale à 180^d diviſés par $\sqrt{n}$, c'eſt-à-dire, préciſément la même que ſi le Fluide ne réſiſtoit pas.

Remarque I.

430. Au reſte, il y a une choſe importante à remarquer dans la ſolution de ce Problême. On a vu (*art.* 420.) que $fa = \frac{8f\delta}{3}$. donc pour réduire $c^{2ft:fa}$ à $1 + \frac{2ft}{fa}$, il faut que t ſoit infiniment plus petite que $\frac{4\delta}{3}$; c'eſt-à-dire, que $\frac{4\delta}{3}$ ſoit infiniment grand par rapport à $2e$. Car la plus grande valeur de t eſt environ $2e$.

Mais de la ſuppoſition que t ſoit infiniment plus petite que δ, il naît autre inconvénient, c'eſt que $2e$ devant être infiniment moindre que δ, le Sinus du plus grand angle de l'Orbite avec la couche, ſe trouve infiniment plus petit que δ, en prenant a pour Sinus total. Car la plus petite valeur de z eſt alors $\frac{aa}{e\sqrt{n}}$, comme il eſt aiſé de

le prouver. Or nous avons fait voir ci-deſſus (*art.* 353.) que quand l'angle NOM que fait la direction du Fluide avec celle du Cercle eſt infiniment petit, on ne peut plus ſuppoſer que NM ſoit la direction ſuivant laquelle le Fluide réſiſte.

D'où l'on voit que la ſolution du Problême ne peut plus paſſer pour exacte, lorſque t eſt infiniment petite par rapport à δ ; & qu'elle n'eſt même exacte que quand $2e$ eſt infiniment grande par rapport à δ; encore ne peut-on déterminer alors exactement les points de la courbe proche des apſides, parce que l'angle NOM y eſt trop petit.

Cela n'empêche pas néanmoins, que ce que nous avons dit ſur le mouvement des apſides dans le cas où t eſt infiniment petite par rapport à δ, ne puiſſe être regardé comme vrai. Car alors l'impulſion du Fluide, réſultante de l'obliquité du mouvement de la Sphere, eſt infiniment petite par rapport à la force centrifuge, & ainſi le mouvement des apſides eſt le même à très-peu de choſe près, que ſi le milieu ne réſiſtoit pas.

REMARQUE II.

431. Lorſque le milieu ne réſiſte pas, il n'y a qu'à ſuppoſer $f = 0$, & l'on verra que pour trouver le mouvement des apſides, il ſuffira d'intégrer la quantité adt: $[(a+e-t)^2.\sqrt{[\frac{(2ret-rtt).Aa}{4a}+\int k(e-t)^2\,dt]}]$, dans laquelle k exprime une quantité conſtante, & dont on

trouvera facilement par l'*article* 422, que l'intégrale eſt $\frac{180^{\circ} V \Psi a}{V r A}$.

Cette Méthode a, ce me ſemble, un avantage ſur celle que M. *Newton* a donnée l. I. Sect. IX. de ſes *Principes*, en ce qu'elle fait voir que l'expreſſion de la diſtance des apſides eſt la véritable à un infiniment petit du ſecond ordre près; ce qui ne paroît pas réſulter de la Théorie de M. *Newton*, qui ſemble au contraire ne donner cette diſtance qu'à un infiniment petit du premier ordre près. Il eſt vrai que cet inconvénient n'eſt rien, lorſque la force centripéte eſt comme une ſimple puiſſance de la diſtance; mais il commence à ſe faire ſentir lorſqu'elle eſt comme $b x^m + c x^n$, ainſi que M. *Newton* le ſuppoſe Ex. III. & lorſque c eſt infiniment moindre que b. Car alors on trouve pour la diſtance d'une apſide à l'autre un angle qui ne differe que d'un infiniment petit du premier ordre, de celui qu'on auroit trouvé dans le cas de $c = 0$. Mais comme on ne ſait pas ſi dans le cas de $c = 0$ on n'eſt pas éloigné du vrai angle d'un infiniment petit du premier ordre, en ſuivant la Méthode de M. *Newton*, il paroît qu'on n'eſt pas aſſuré alors de l'exactitude de la ſolution. On ſera encore plus confirmé dans ce doute, ſi on fait attention que dans la ſolution du Problême, M. *Newton* néglige la quantité $b X X$, & conſerve cependant la quantité $c X$, qui eſt du même ordre que $b X X$ lorſque c eſt infiniment petite par rapport à b.

Des cas où l'on peut conſtruire l'Orbite, lorſque la réſiſtance eſt comme la quatriéme puiſſance de la vîteſſe.

432. Si dans l'Equation (*I*) de l'*article* 426, on ſuppoſe $\Psi x = x^n$ & $\varphi g = g^4$, & que l'on faſſe outre cela $\frac{a^4}{xxzz} = v$, & $v = px^r + qx^s t$, elle ſe changera dans l'Equation ſuivante

$2a^{2-n}x^{n-3}dx + 2a^2x^{-3}dx - \frac{2fx^n dx}{fa^{n+1}} \times (ppx^{2r} + 2pqx^{r+s}t + qqx^{2s}tt) + prx^{r-1}dx + qsx^{s-1}tdx + qx^s dt = 0$. Il n'eſt plus queſtion maintenant que de chercher les cas où l'on peut conſtruire cette Equation.

Je remarque d'abord qu'elle ſera conſtructible, ſi tous les termes où il n'y a que la variable x avec ſa différence dx & des conſtantes, ſe détruiſent mutuellement.

1°. Il eſt inutile de comparer le terme où eſt $x^{n-3}dx$ avec celui où eſt $x^{-3}dx$, parce que cette comparaiſon donne $n = 0$; & qu'on a déja vu (*art.* 429.) que dans ce cas on peut toujours conſtruire la courbe.

2°. En comparant le terme $2a^{2-n}x^{n-3}dx$ avec $prx^{r-1}dx$, & $2aax^{-3}dx$ avec $\frac{-2fx^n dx}{fa^{n+1}} . ppx^{2r}$, on trouve $n = \frac{1}{3}$ & $r = -\frac{5}{3}$; & $f : f :: 25$ à 36. Or le rapport des forces f, f ne peut être un rapport fini que dans le cas où la vîteſſe de circulation eſt fort petite (*art.* 421.). Donc la courbe ſera conſtructible, ſi $n = \frac{1}{3}$, ſi la vîteſſe

de circulation eſt fort petite, & ſi $f : f :: 25 : 36$.

3°. En comparant le terme $2a^{2-n}x^{n-3}dx$ avec $-\frac{2fx^{n+2r}ppdx}{fa^{n+1}}$, & $2aax^{-3}dx$ avec $prx^{r-1}dx$, on trouveroit $2r = -3$ & $r = -2$; ce qui eſt impoſſible.

4°. Les Géometres ſavent que ſi on pouvoit réduire l'Equation dont il s'agit ici à n'avoir que trois termes, dont l'un contînt dt, l'autre tt avec x, & dx, l'autre enfin x & dx ſeulement, il y a des cas où cette Equation, connue ſous le nom d'Equation de *Ricati*, ſeroit conſtructible.

Pour réduire à cette forme l'Equation dont il s'agit, on fera d'abord $\frac{-4pf}{fa^{n+1}} + s = 0$, & $n + r = -1$. On mettra pour r ſa valeur $-1-n$ dans les expoſans de x, & l'on fera enſuite $-2-n = -3$ & $\frac{-2ppf}{fa^{n+1}} + pr + 2aa = 0$; ou bien $-2-n = n-3$, & $\frac{-2ppf}{fa^{n+1}} + pr + 2a^{2-n} = 0$. Dans le premier cas, on aura $n = 1$, & on trouvera que l'Equation eſt conſtructible, ſi $8f = f.(s[2 + \frac{s}{2}])$, s étant égale à $\frac{-3-2m}{2}$, & m déſignant un nombre entier poſitif. Dans le ſecond cas, on aura $n = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2m-7}{4}$, & $16f = f(s.[3+s])$, m déſignant toujours un nombre entier poſitif.

Donc on pourra encore conſtruire la courbe, ſi $n = 1$ *&* *ſi* $n = \frac{1}{2}$, *pourvû que la matiere du Tourbillon ſe meuve fort lentement, & que le rapport de f à* f *ſoit tel que le donnent les Equations précédentes.*

Des Orbites décrites par une Sphere dans un milieu qui réſiſte peu.

433. *Imaginons qu'une Sphere très-petite* A *ſe meuve dans un Tourbillon dont la matiere ne ſoit capable que d'une très-petite réſiſtance, & que cette Sphere ſoit continuellement attirée vers le centre du Tourbillon par une force quelconque ; on propoſe de déterminer la courbe qu'elle doit décrire, en ſuppoſant que cette courbe differe infiniment peu d'un Cercle.*

Comme l'Orbite differe très-peu d'un Cercle (*hyp.*), & que la vîteſſe tant du mobile que du Fluide peut être regardée comme conſtante à tous les points de l'Orbite, la réſiſtance pourra être auſſi regardée comme conſtante dans le ſens de l'Orbite, & comme nulle dans le ſens du rayon vecteur. Si on nomme p cette réſiſtance, x la diſtance d'un point quelconque de la courbe au centre du Tourbillon, p la perpendiculaire menée du centre ſur la tangente qui paſſe par ce point de la courbe, $\frac{f \Psi x}{\Psi a}$ la force centrale, & ds l'élément de la courbe, lequel doit être cenſé égal à l'élément du Cercle décrit du rayon a, (a étant la diſtance du centre du Tourbillon à

à un des points où la courbe eſt perpendiculaire à ſon rayon, & d'où l'on ſuppoſe que le Corps part avec une vîteſſe $= g$), on aura

$$\frac{f\,dx\,\Psi x}{\Psi a} + \mathrm{p}\,ds = -\,m\,u\,du,$$

$$\&\; -2f\,dx\,\Psi x : \Psi a\,(mgg - 2\int \frac{f\,dx\,\Psi x}{\Psi a} - 2\,\mathrm{p}\,s) = -\,\frac{2\,dp}{p}.$$

Donc

$$L^{*}([mgg - 2\int \frac{f\,dx\,\Psi x}{\Psi a}] \times aa.[aa + zz] : mggxxzz) =$$

$$\int \frac{2\,\mathrm{p}\,s.2f\,dx\,\Psi x}{m^{2}g^{4}}.$$

Soit $\Psi x = x^{n}$, $x = a - t$, $gg = \frac{2fb}{m}$, & $2b = a + e$, (e & t étant des quantités fort petites l'une & l'autre) $3 + n = \alpha$, $\frac{4p}{f} = \mathcal{C}$, & l'on aura l'Équation ſuivante

$$\frac{dt}{V(2et - \alpha tt + \mathcal{C}\int s\,dt)} = \frac{ds}{a};$$

en faiſant $2et - \alpha tt + \mathcal{C}\int s\,dt = rr$, & $dt = \frac{q\,dr}{a}$, on trouvera que $q = \pm \frac{ar}{V[(\mathcal{C}ar - \alpha rr + A)]}$, A étant une conſtante ajoutée en intégrant : d'ou l'on tirera

$$s = \frac{2\alpha t - 2e \pm 2[V\mathcal{C}ar - \alpha rr + A]}{\mathcal{C}}.$$

Cette valeur de s doit être $= 0$, lorſqu'on a à-la-fois r & $t = 0$, d'où l'on tire $A = ee$. Pour avoir la valeur de t, on obſervera que rr ou ſa valeur $2et - \alpha tt + \mathcal{C}\int s\,dt$

* Cette lettre *L* ſignifie *Logarithme*.

doit être $= 0$, lorſque $t = 0$; & de plus, lorſque t eſt telle que $2et - \alpha tt + \zeta \int s\,dt = 0$; qu'ainſi la valeur de dt qui eſt $\pm \frac{r\,dr}{\sqrt{[\zeta ar - \alpha rr + A]}}$ doit être telle, que pour une même r on ait deux valeurs de t qui deviennent égales, lorſque r ſera la plus grande qu'il ſera poſſible, & qui ſoient telles, que l'une ſoit égale à zero lorſque $r = 0$.

Pour cela, on conſtruira d'abord d'un rayon égal à $\sqrt{[\frac{ee}{\alpha} + \frac{\zeta\zeta aa}{4\alpha\alpha}]}$, un Cercle ſur lequel on prendra CO (Fig. 164.) $= \frac{\zeta a}{2\alpha}$, puis on décrira la Cycloïde accourcie AQS, qui ſoit telle, que AN ſoit à NS :: $\sqrt{[\frac{ee}{\alpha} + \frac{\zeta\zeta aa}{4\alpha\alpha}]} : \frac{\zeta a}{2\alpha}$; je dis que pour une même abſciſſe SD, r, les deux valeurs de t ſeront $\frac{Dq}{\sqrt{\alpha}}$ & $\frac{DQ}{\sqrt{\alpha}}$. La valeur de s ſera NK ou NKZ multiplié par $\frac{2aa.\sqrt{\alpha}}{\sqrt{[4\alpha ee + \zeta\zeta aa]}}$.

COROLLAIRE I.

434. De-là il s'enſuit, que ſi $e = 0$ & $\alpha = 1$ la diſtance d'une apſide à l'autre eſt de 360 degrés, c'eſt-à-dire, que *ſi la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & que l'Orbe décrite dans le vuide ſoit un Cercle, l'Orbite décrite dans un milieu peu réſiſtant aura ſes deux apſides diſtantes l'une de l'autre de 360 degrés.*

COROL. II.

435. En général, la distance des apsides est égale à l'angle qui a pour mesure NKM divisé par $\sqrt{a}$.

REMARQUE.

436. Il ne seroit pas plus difficile de déterminer le mouvement des apsides, dans le cas où les densités des couches seroient comme une fonction quelconque des rayons.

Soit Ψx cette fonction, & $dx\,\Delta x$ la différence, il faudra seulement au lieu de n, mettre $\frac{a\,\Delta a}{\Psi a}$, & tout le reste demeurera le même que ci-dessus.

La Théorie des trajectoires décrites dans un milieu qui résiste peu, a été traitée d'une maniere encore plus générale & plus directe dans la seconde Partie de mes *Recherches sur le système du monde*, articles 281 & suivans. On y trouve les mêmes résultats que ci-dessus, & plusieurs autres remarques curieuses & importantes sur cette matiere.

Du mouvement d'un Corps dans un Tourbillon non circulaire.

437. Quoique j'aye fait voir ci-dessus qu'un pareil Tourbillon étoit impossible, cependant il ne sera pas inutile de remarquer, que quand on le supposeroit possible, un Corps qui y seroit plongé ne pourroit suivre le mouvement des differentes couches de ce Tourbillon, comme le suppose ceux des Cartésiens qui sub-

ſtituent des Tourbillons elliptiques aux Tourbillons circulaires. Car ſoit n un Arc quelconque d'une couche dans laquelle on ſuppoſe que le Corps ſe trouve, X la vîteſſe de la couche au point où eſt le Corps, u la vîteſſe du Corps, on aura (*art.* 246.) $u\,du = (X - u)^2\,dx$; d'où l'on voit qu'on ne ſauroit ſuppoſer $u = X$. Donc &c.

F I N.

Additions pour quelques endroits de cet Ouvrage.

PAGE 50, *ligne* 17, *après ces mots* plus en détail, *ajoutez*. Voyez le Tome V de nos *Opuſcules Mathématiques*, trentiéme Mémoire, articles 1 & 12.

Et même page, cinq lignes plus bas, après ces mots de niveau, *ajoutez*. Voyez le même Tome V & le même Mémoire, articles 12 & 18.

Page 72, *à la fin de l'article* 81, *ajoutez*. Voyez encore à ce ſujet le Tome V de nos *Opuſcules*, page 145.

Page 96, *ligne* 12, *après ces mots* ou $\prec \lambda\, k$, *ajoutez*. Au reſte, on verra à la fin de cet article, que A ne ſauroit jamai être $\succ \lambda\, k$.

Page 107, *ligne* 4, *à compter d'en bas, après le mot* réſultent, *ajoutez*. Voyez le Tome V de nos *Opuſcules Mathématiques*, pages 70 & ſuivantes.

Page 162, *à la fin, ajoutez*. On trouvera de nouvelles recherches ſur les endroits où le Fluide ſe ſépare, dans le Tome V de nos *Opuſcules*, page 85 & ſuivantes.

Page 203, *à la fin de cette page & de l'article* 219, *ajoutez*. On trouvera dans le Ve Volume de nos *Opuſcules*, page 138 & ſuivantes, de nouvelles réfléxions ſur les Loix de la vîteſſe du ſon; ces réfléxions pourront mériter l'attention des Géométres.

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande.

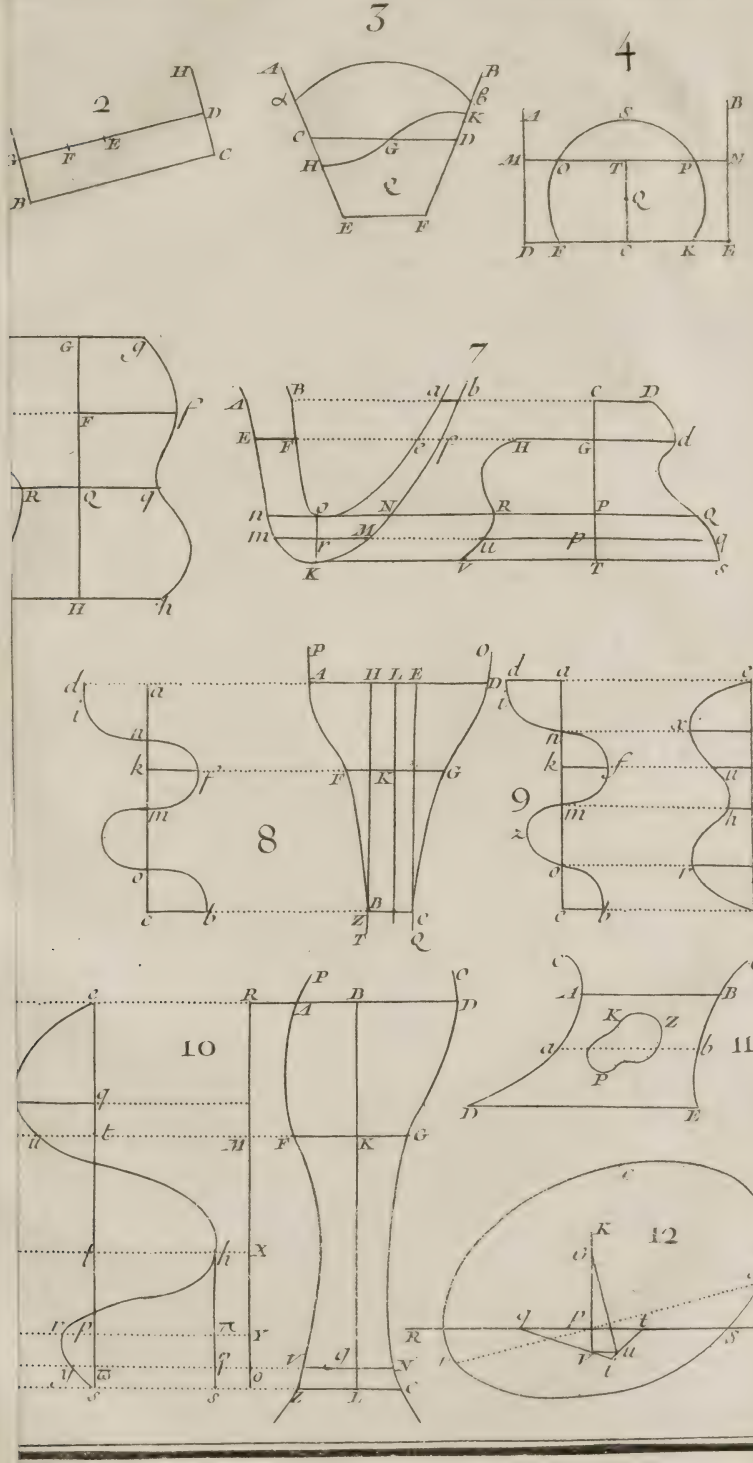
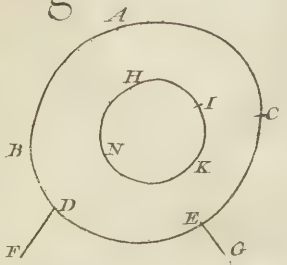
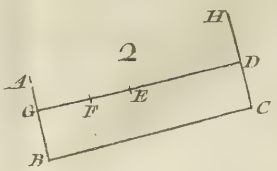
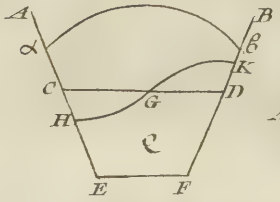
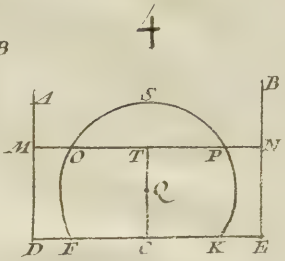

3
2
4
7
8
9
10
11
12

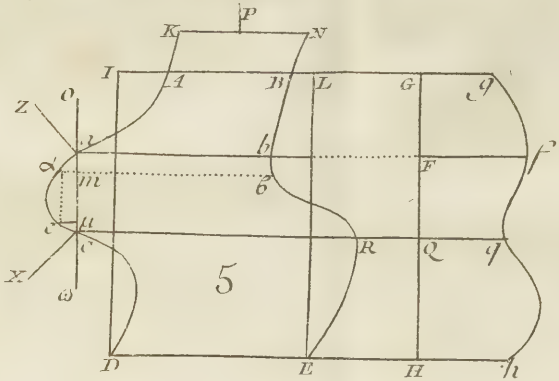
Fig Iere

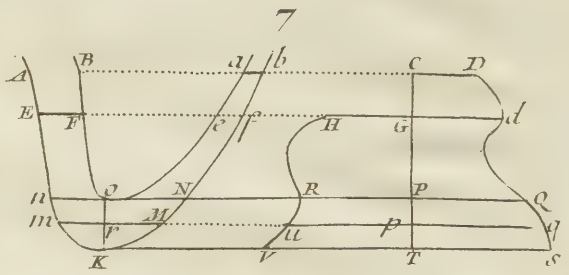

A
H
I
C
B
N
K
D
E
F
G

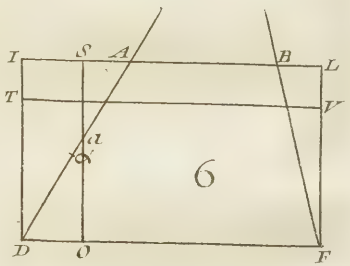

2
H
D
A
G
F
E
C
B

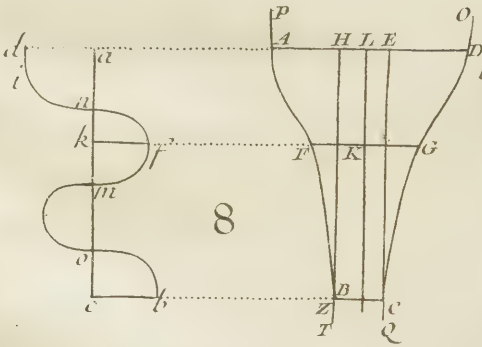

3
A
B
α
β
K
C
G
D
H
E
F

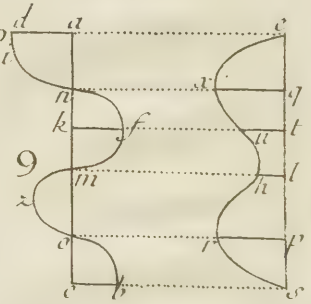

4
A
S
B
M
O
T
P
N
D
F
C
K
E

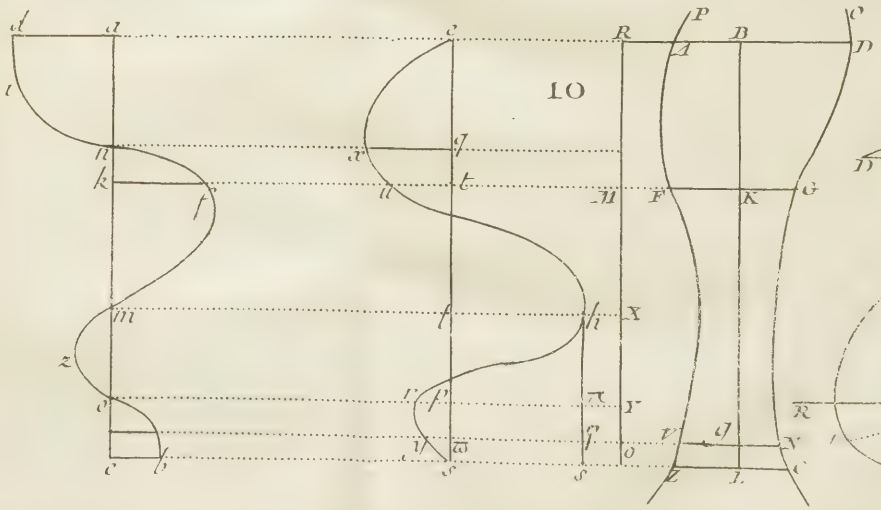

K
P
N
I
A
B
L
G
q
Z
o
b
F
f
m
6
u
c
R
Q
q
X
ω
5
D
E
H
h

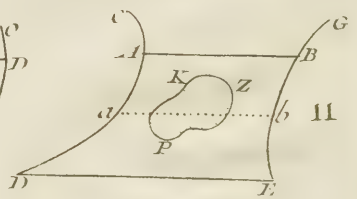

7
A
B
a
b
C
D
E
F
c
e
H
G
d
n
o
N
R
P
Q
m
M
r
u
p
q
K
V
T
s

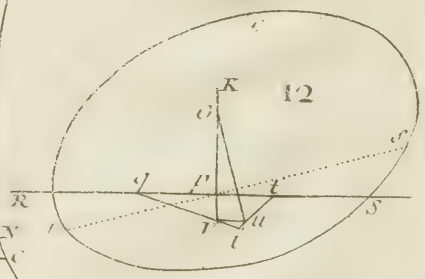

I
S
A
B
L
T
V
a
6
D
O
F

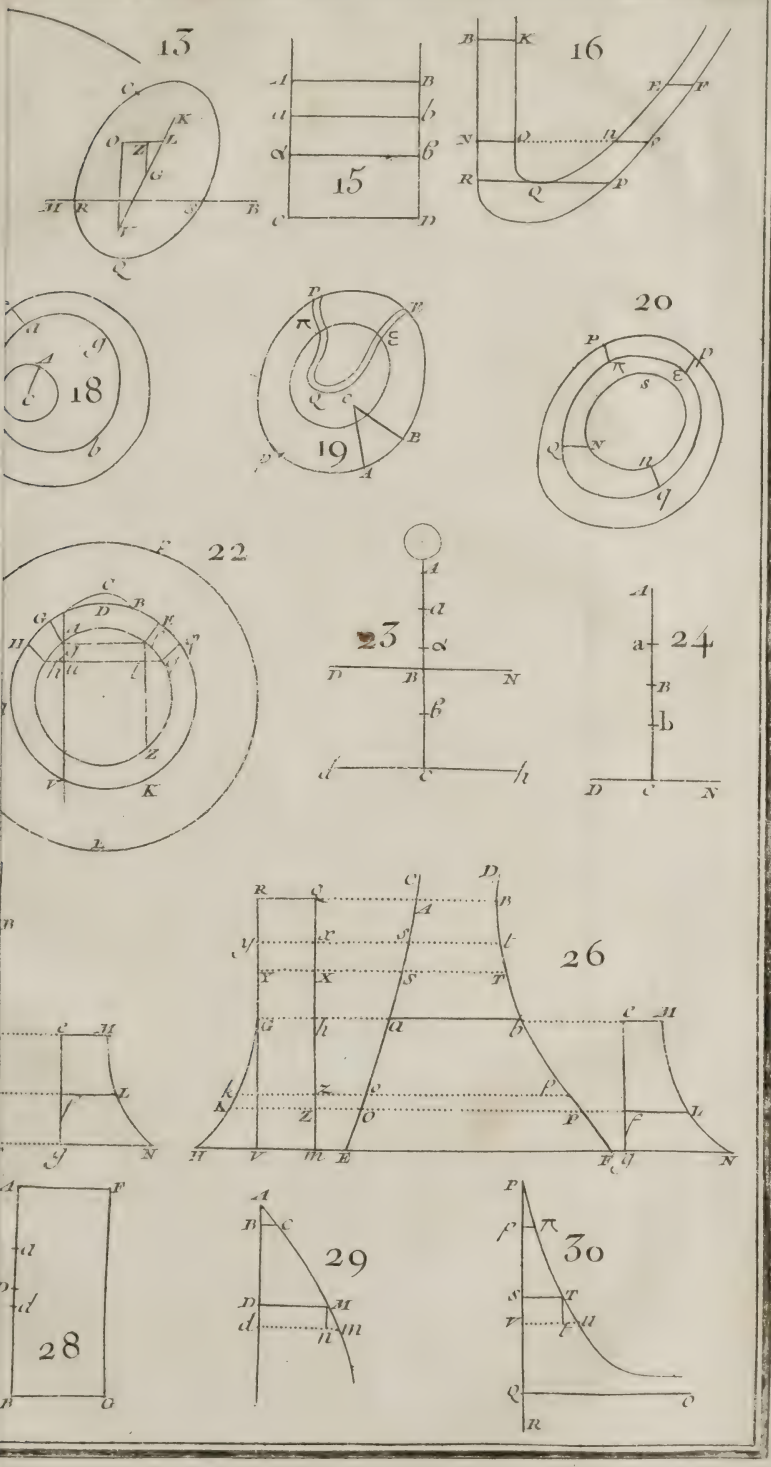

P
o
d
A
H
L
E
D
t
a
n
k
f
F
K
G
m
8
o
B
c
b
Z
T
Q

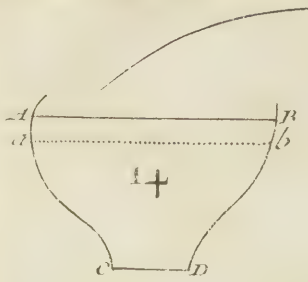

d
a
c
t
n
v
q
k
f
u
t
9
m
h
l
z
o
r
c
b
s

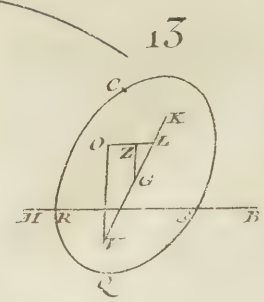

d
d
c
R
P
B
D
t
A
10
n
q
v
k
f
u
t
M
F
K
G
m
f
h
X
z
r
Y
o
f'
π
f
V
ϖ
o
c
b
s
s
Z
T
C

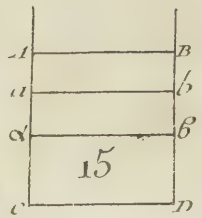

G
A
B
K
Z
a
b
11
P
D
E

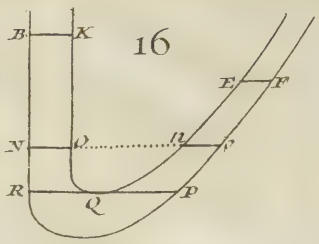

K
12
c
e
q
f'
t
R
S
r
u
l

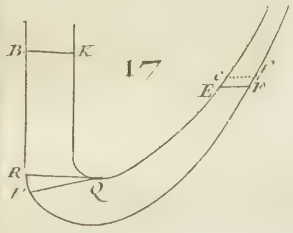

13
15
16
18
19
20
22
23
24
26
28
29
30

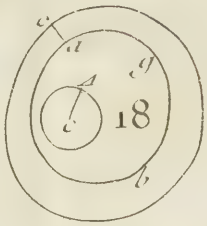

14

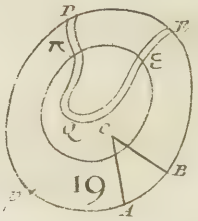

13

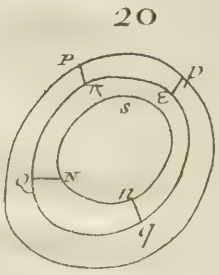

15

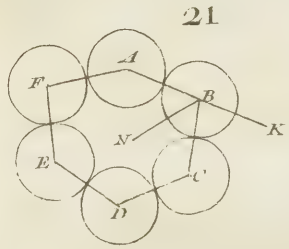

16

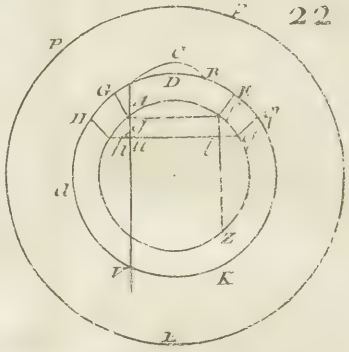

17

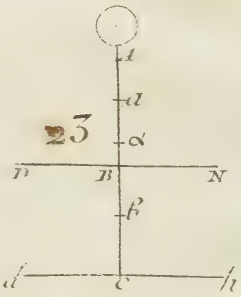

18

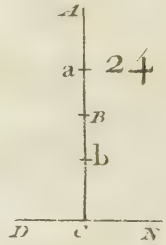

19

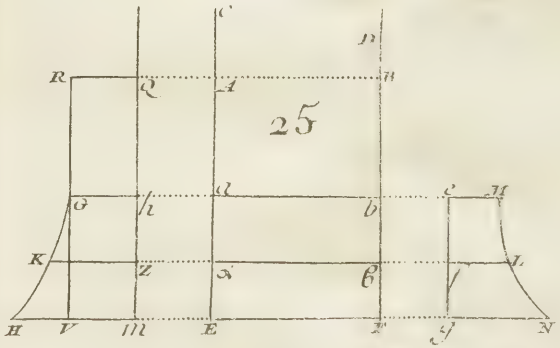

20

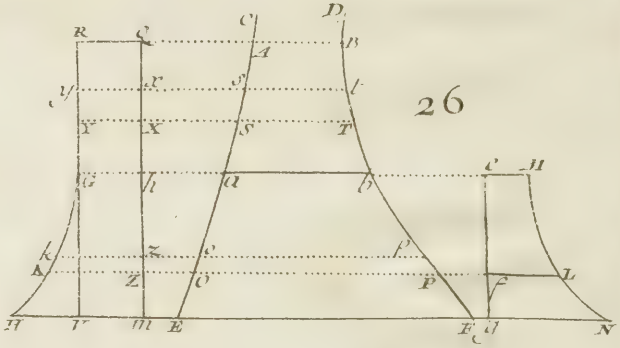

21

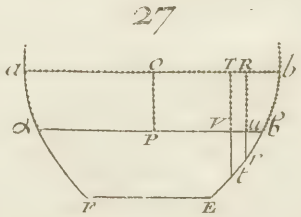

22

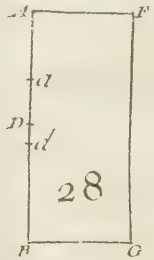

23

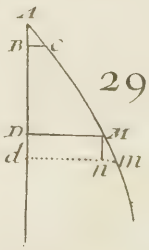

24

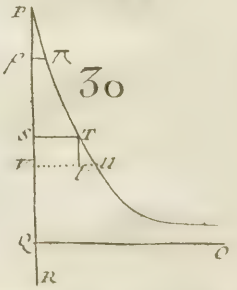

25

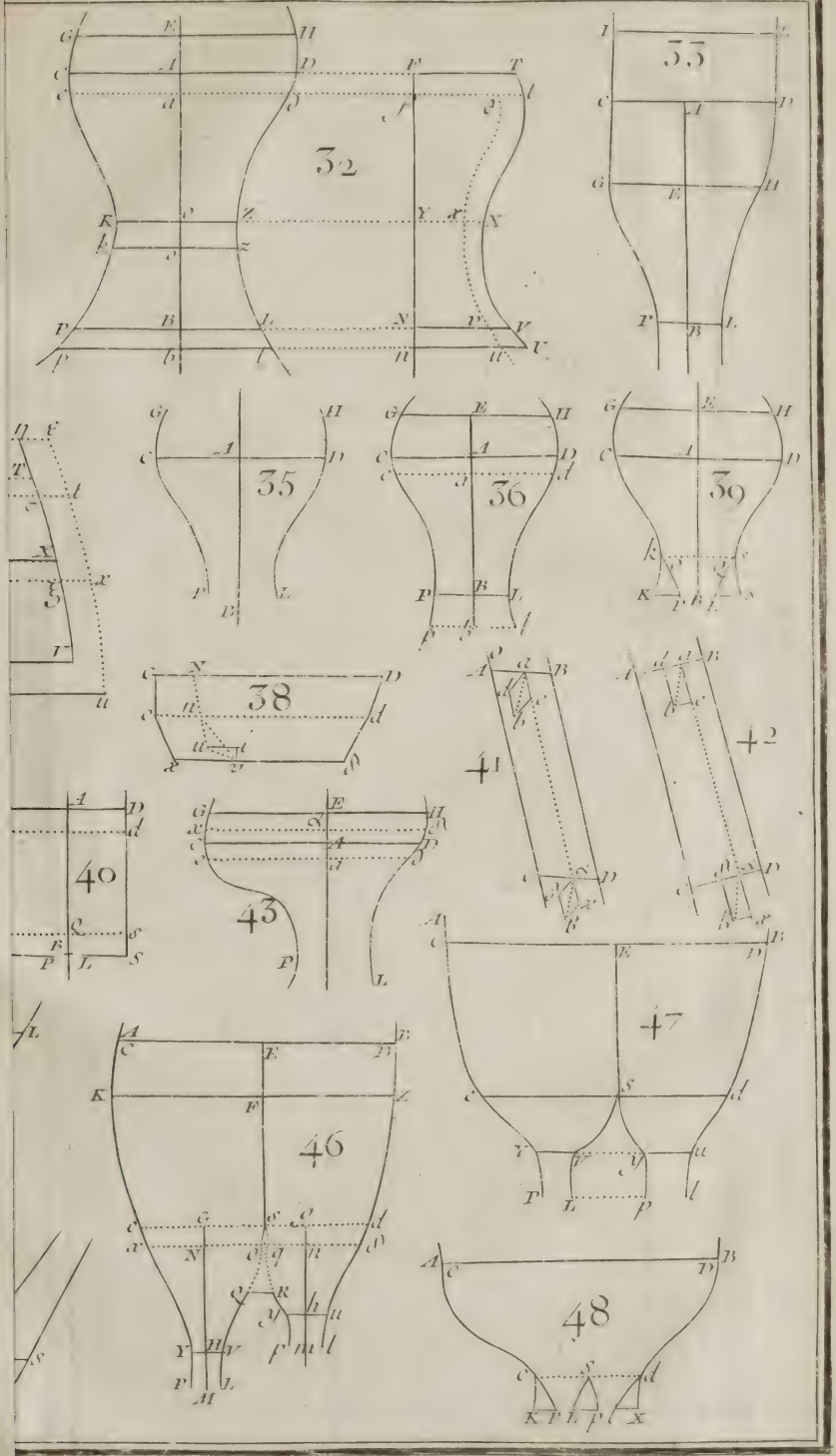

26

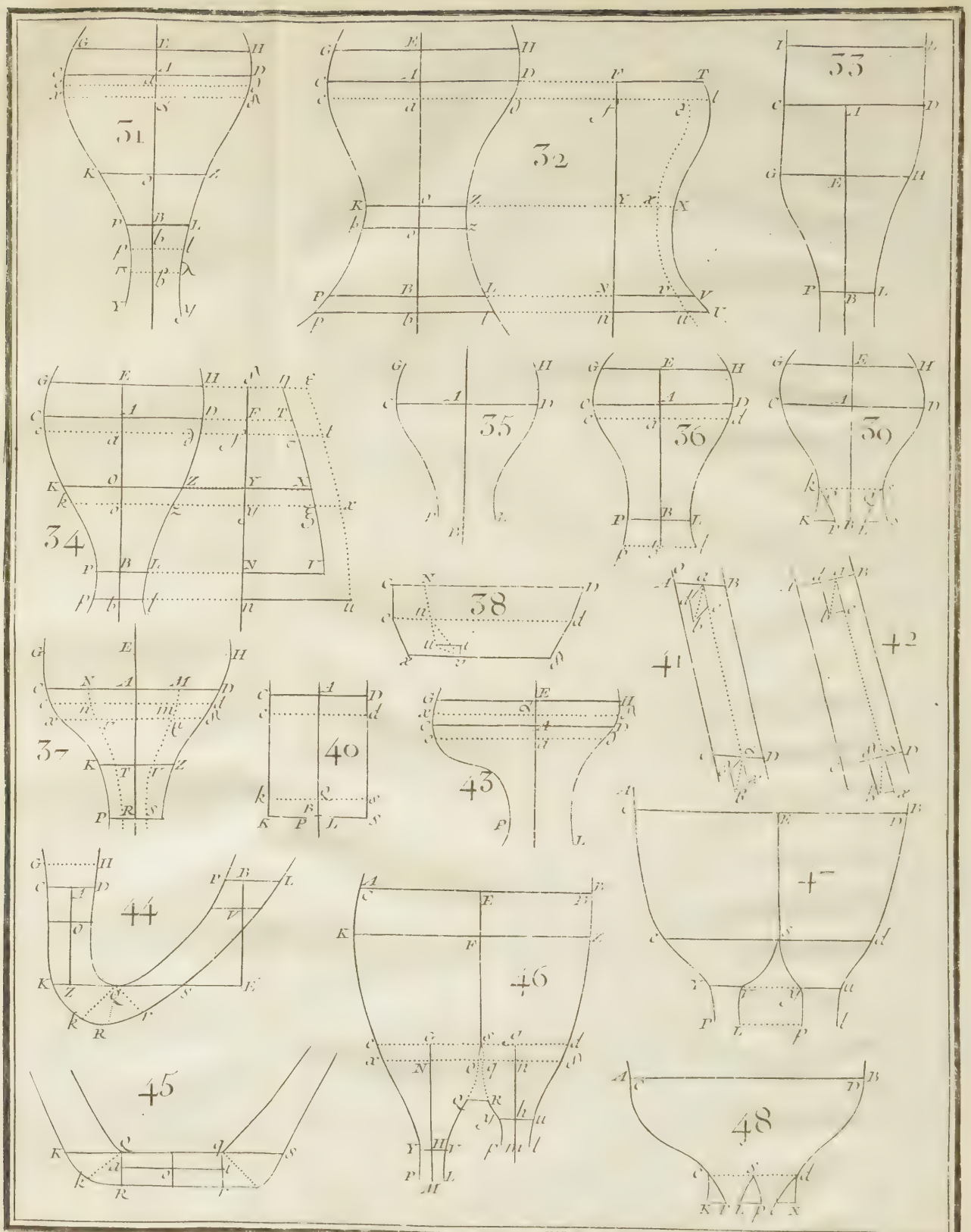

27

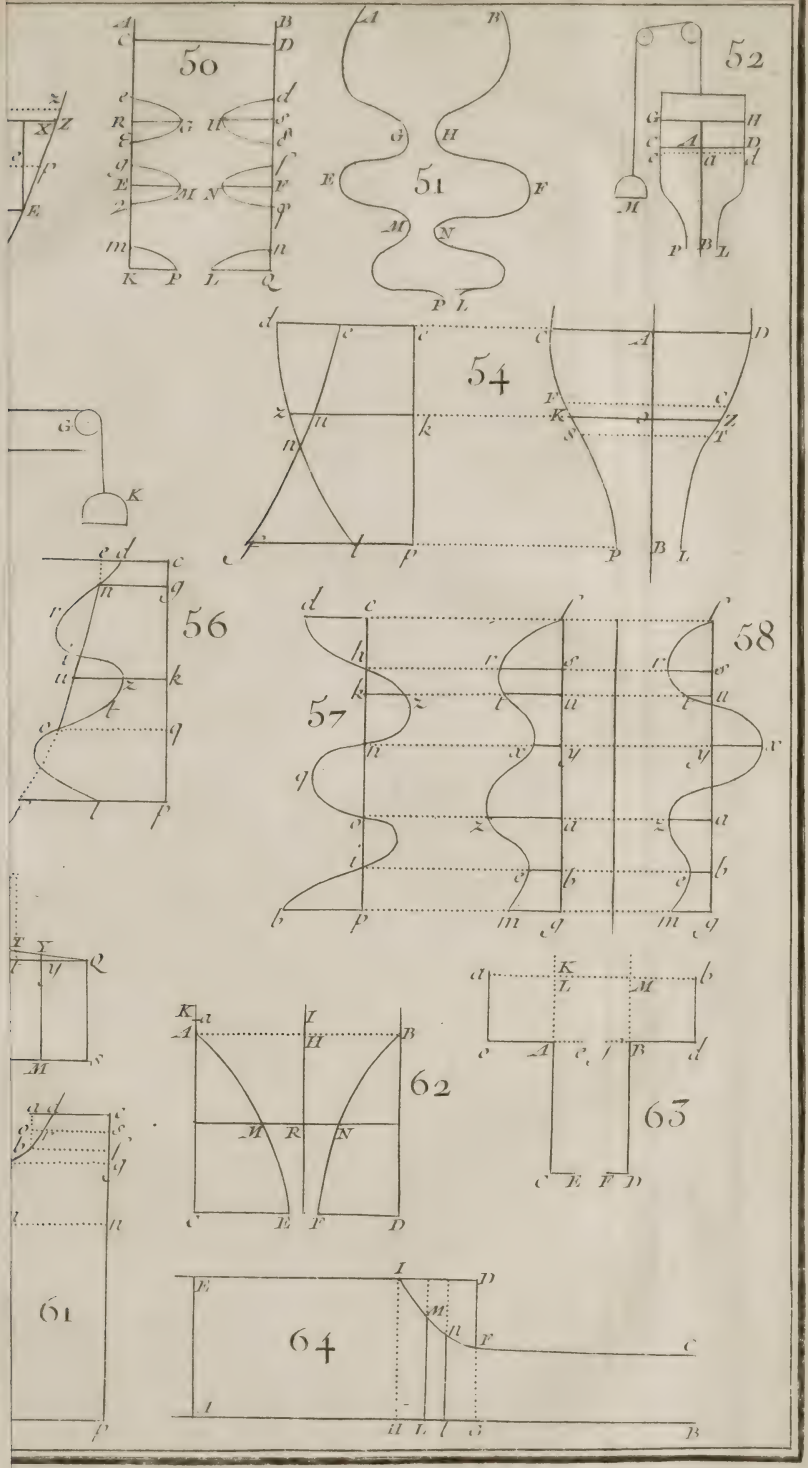

28

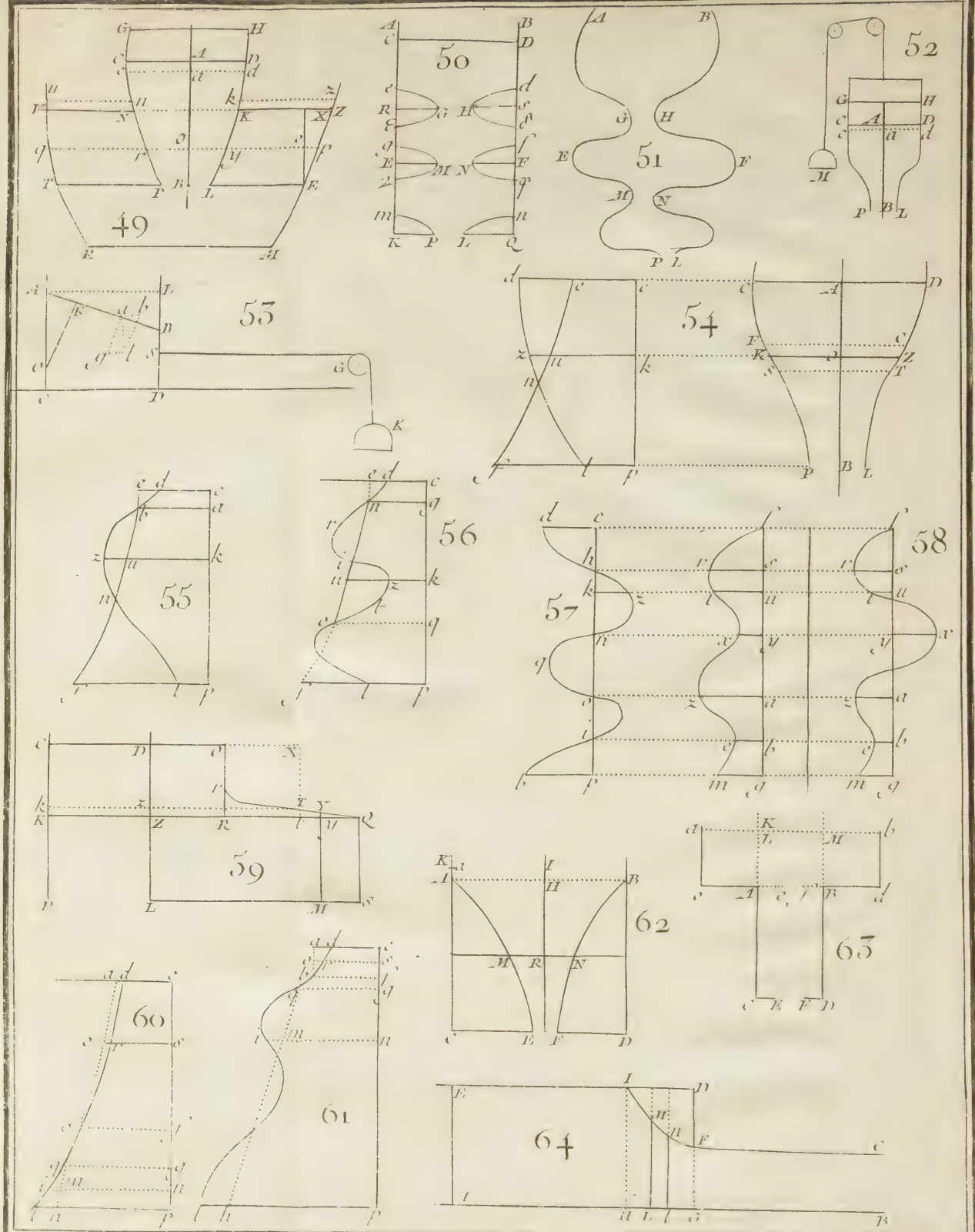

29

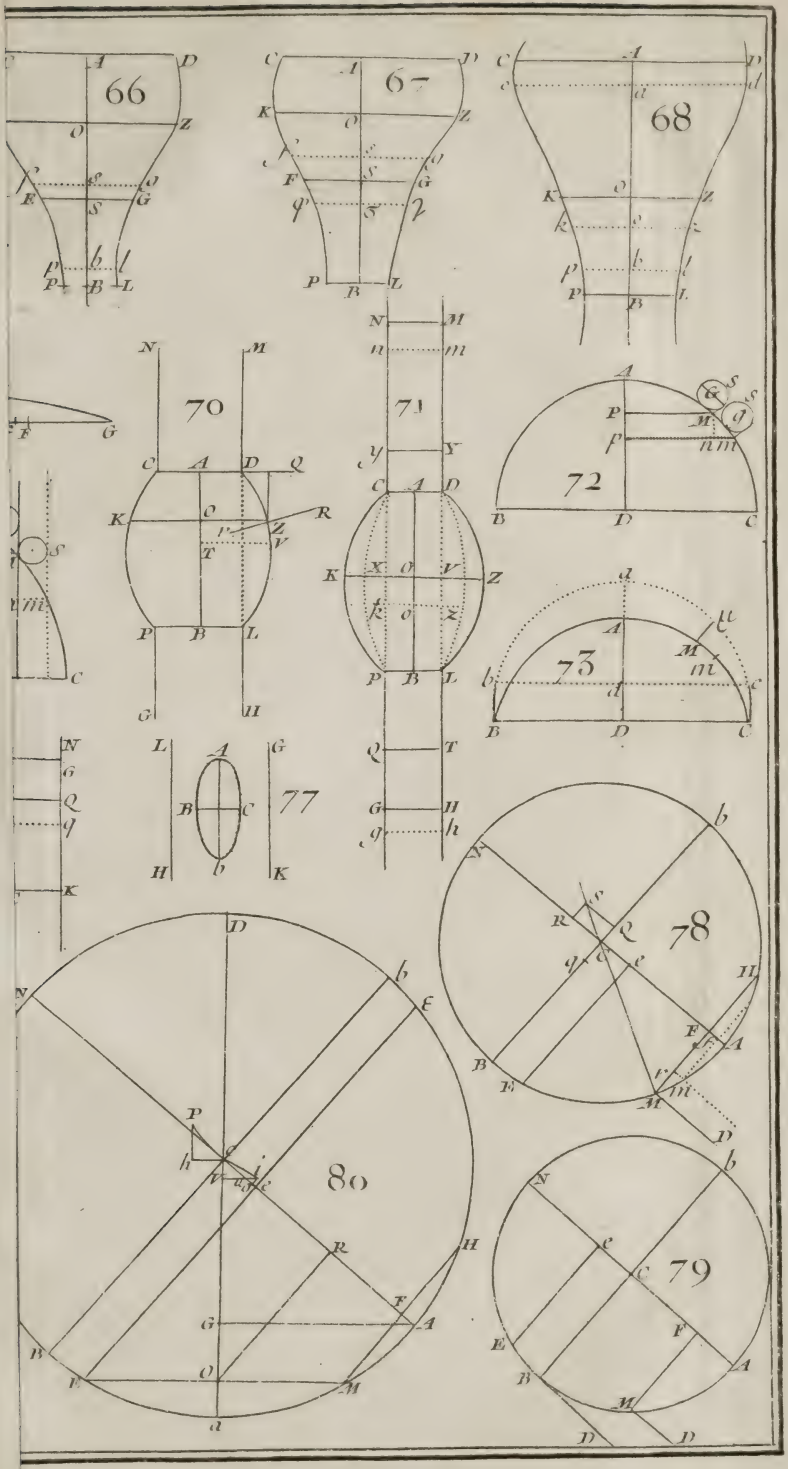

30

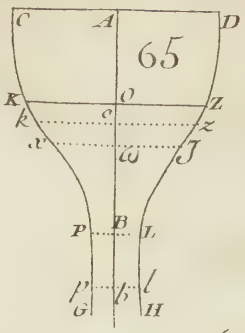

32
33
35
36
39
38
40
41
42
43
46
47
48

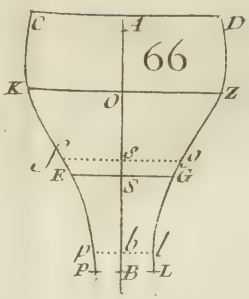

31
32
33
34
35
36
39
38
41
42
37
40
43
44
46
47
45
48

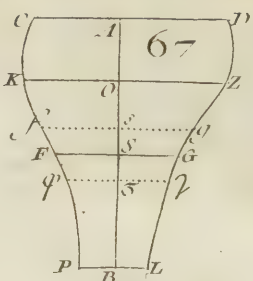

50
51
52
54
56
57
58
61
62
63
64

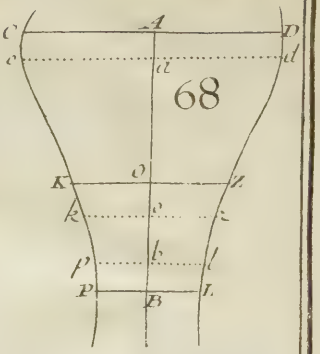

49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64

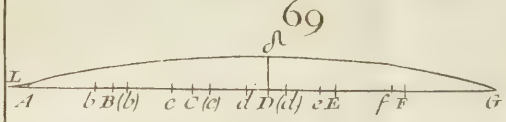

66
67
68
70
71
72
73
77
78
79
80

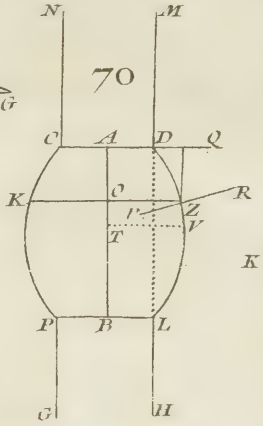

65

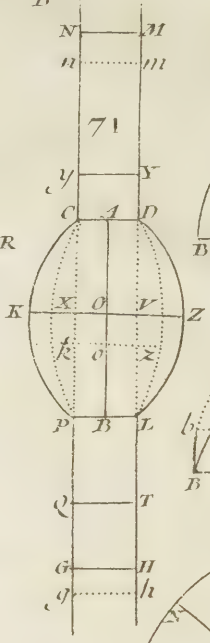

66

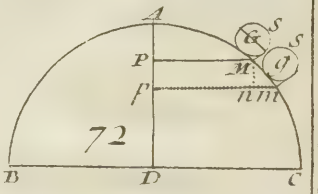

67

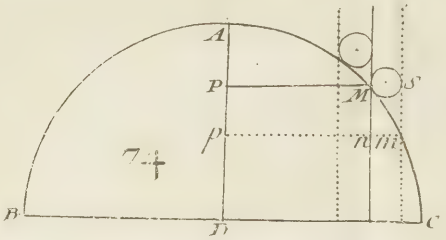

68

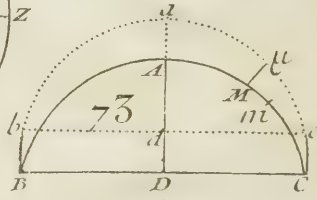

69

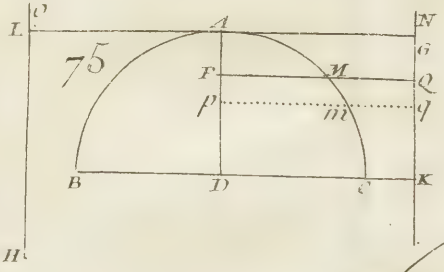

70

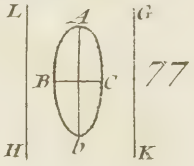

71

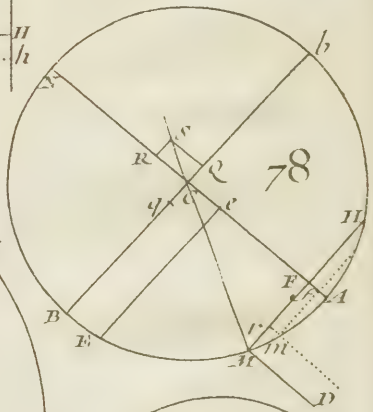

72

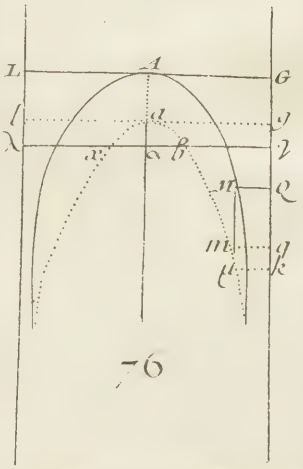

74

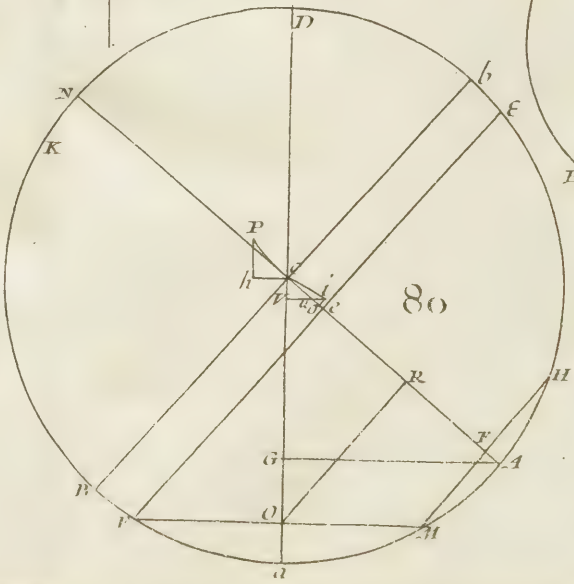

73

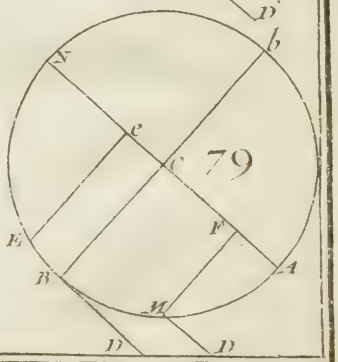

75

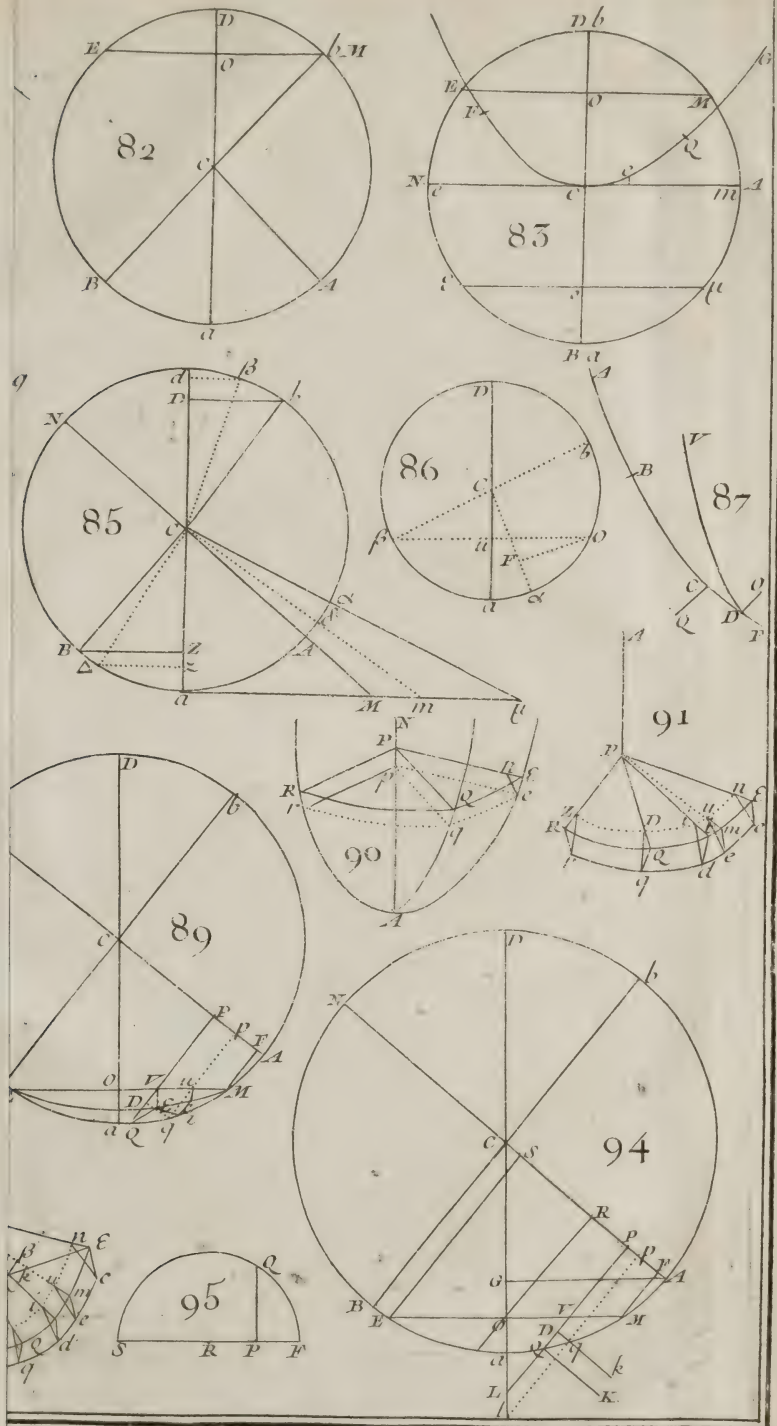

77

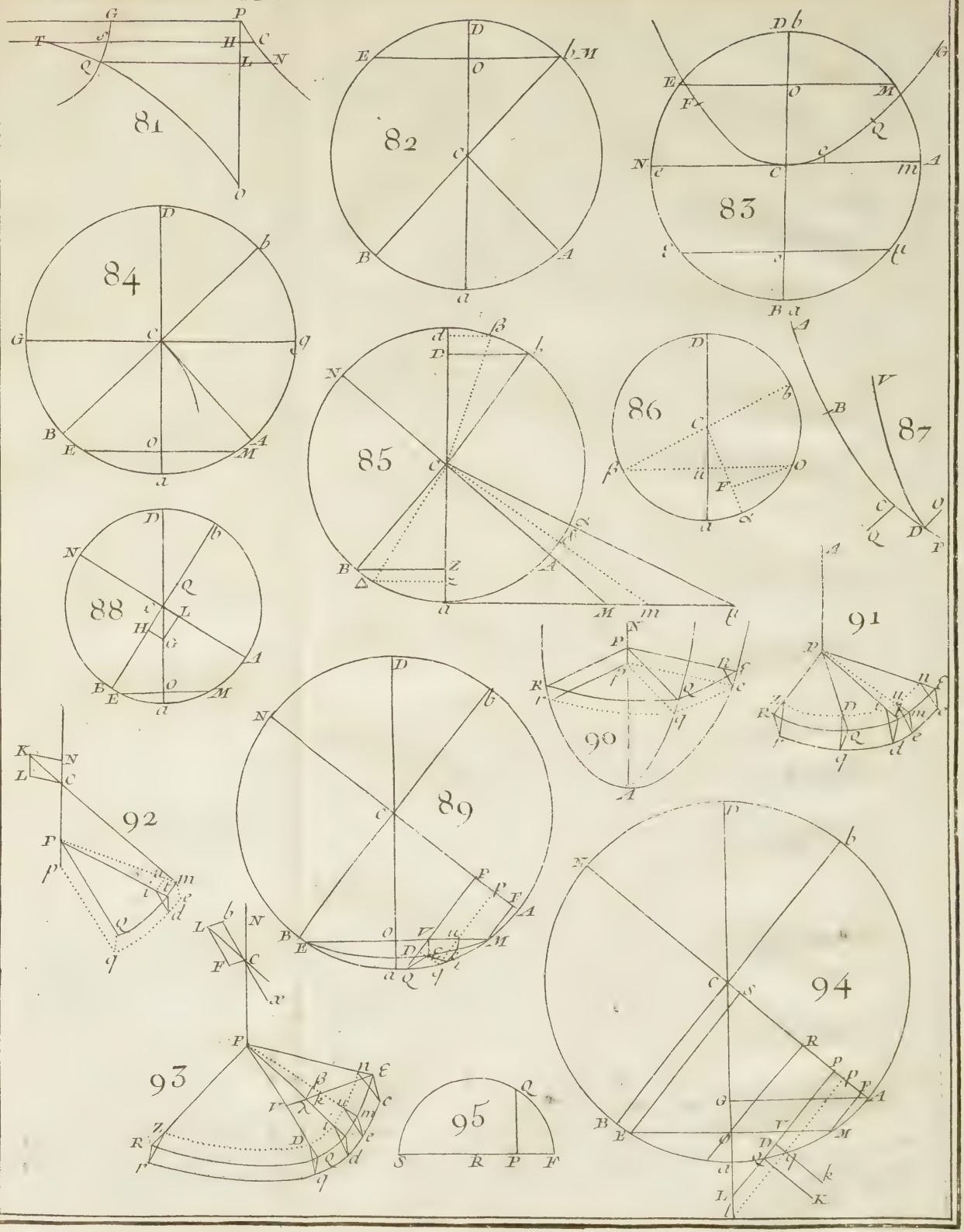

78

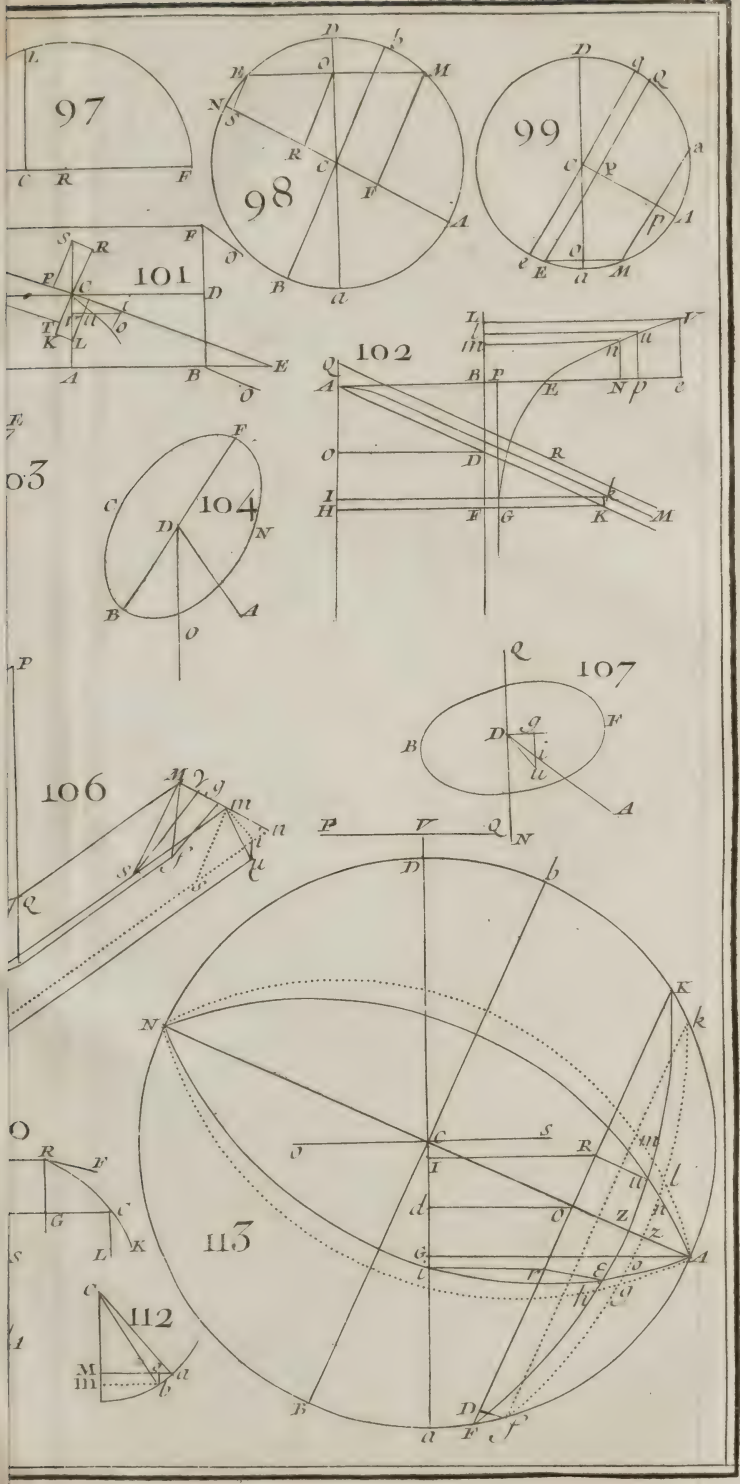

76

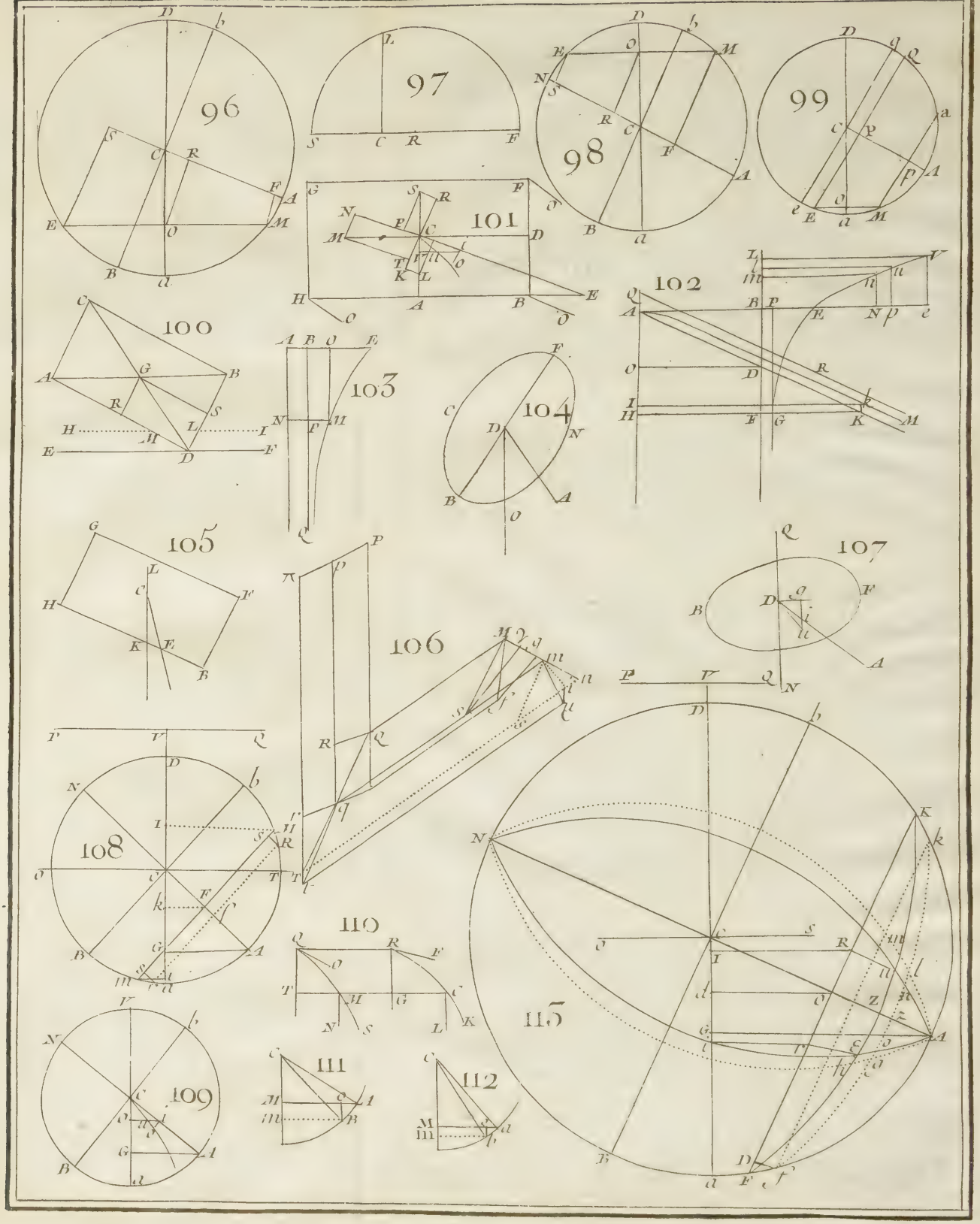

80

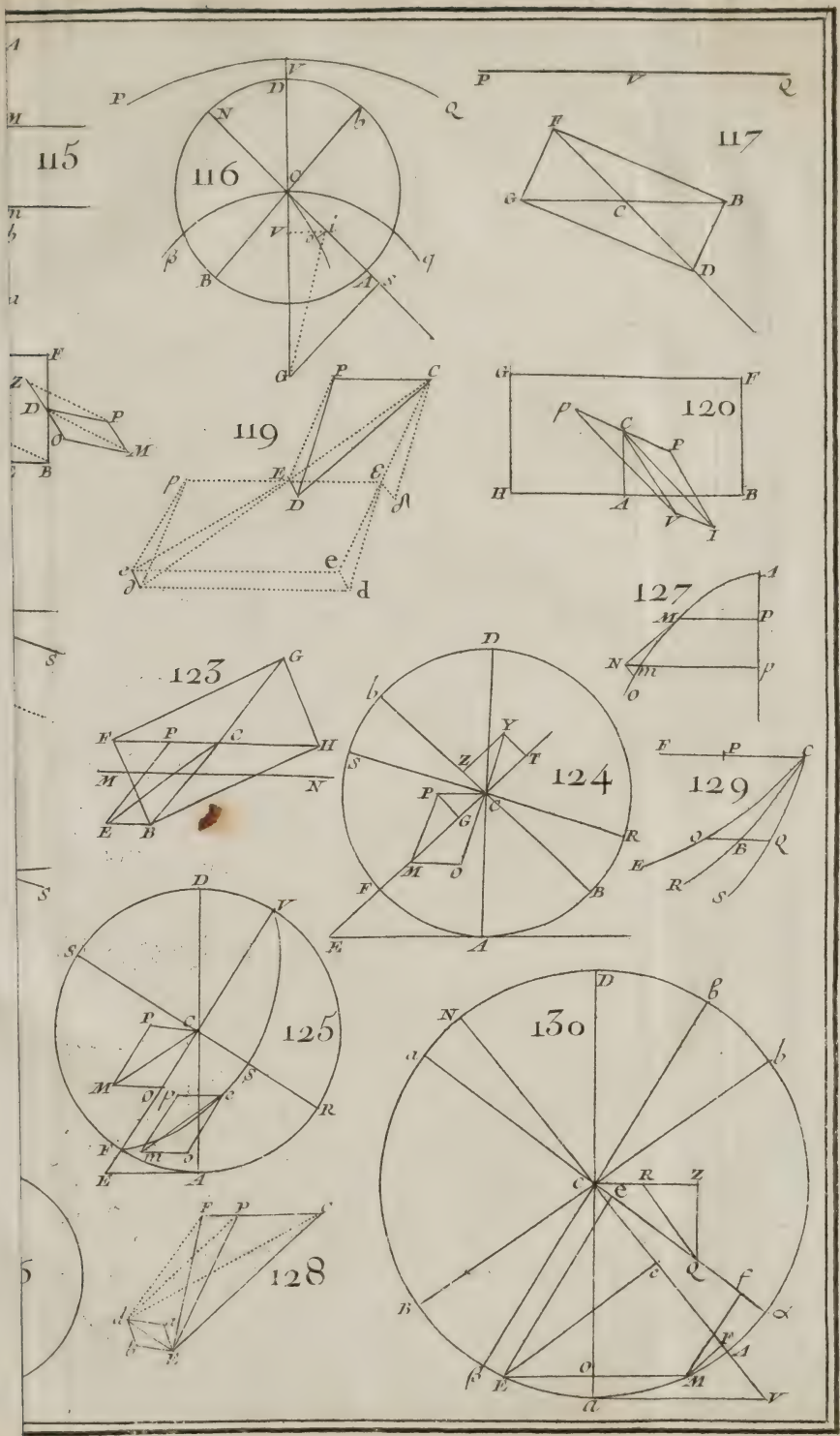

79

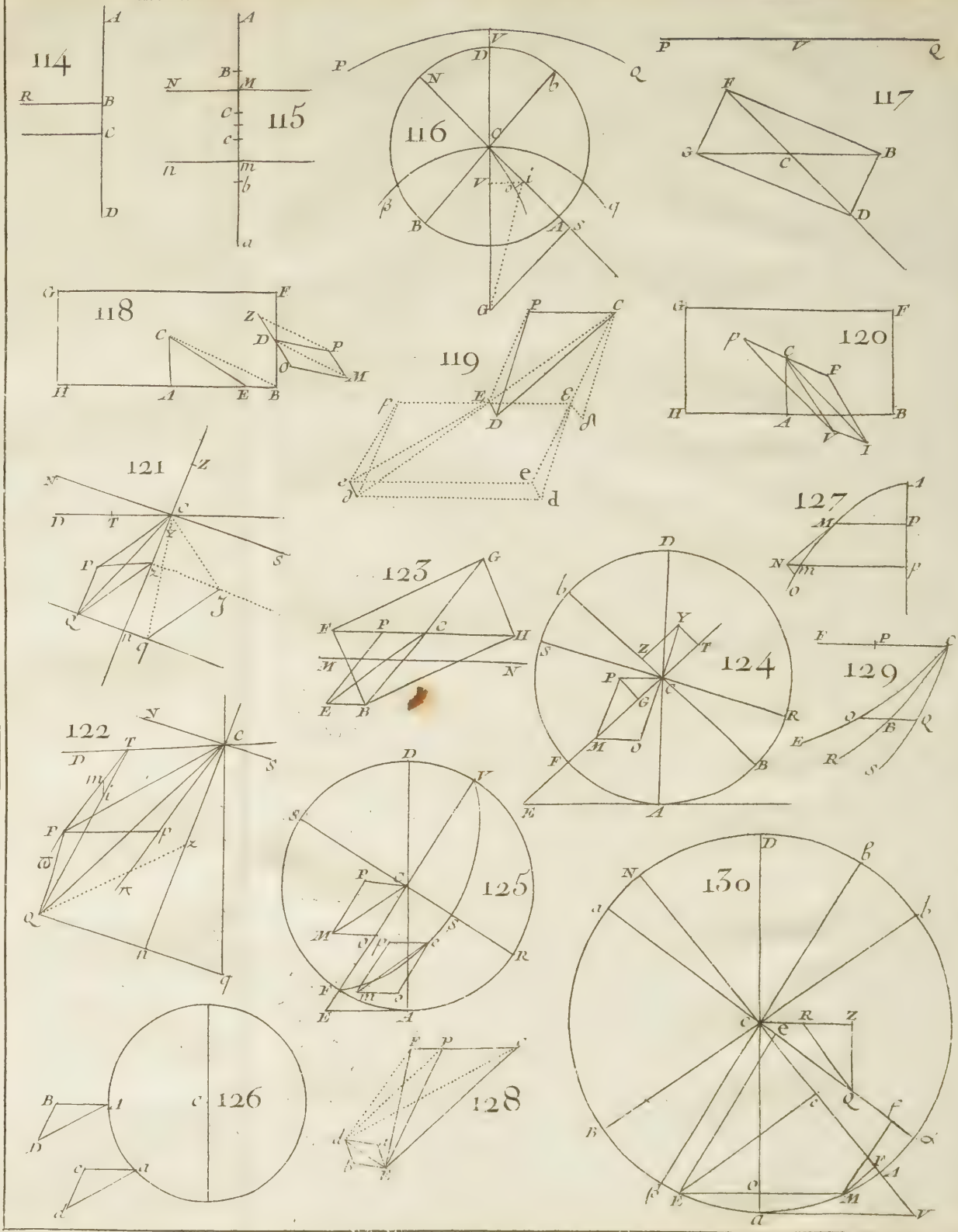

82
83
85
86
87
89
90
91
94
95

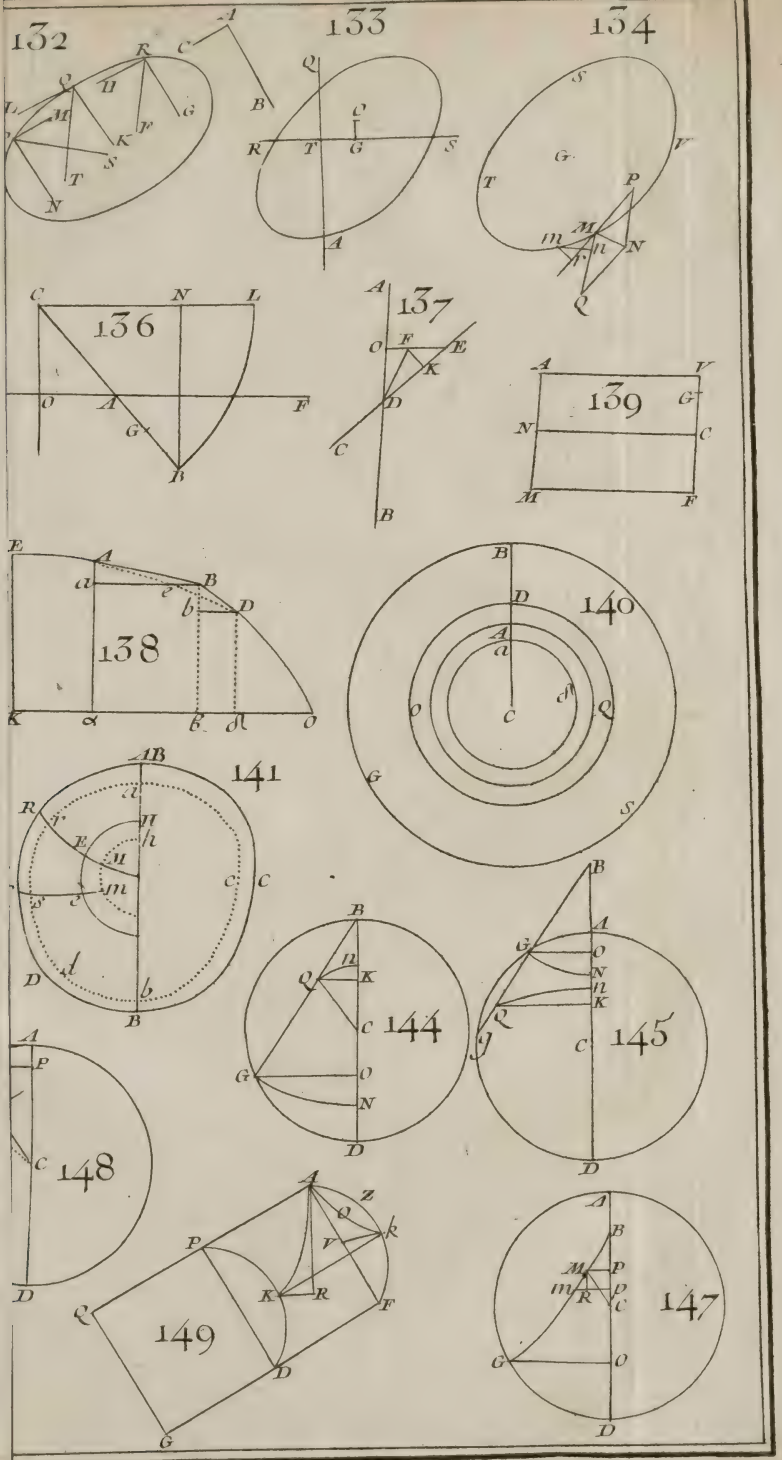

81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95

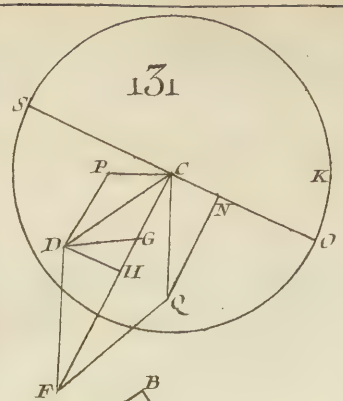

97
98
99
101
102
103
104
106
107
112
113

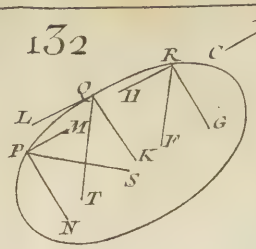

96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
115

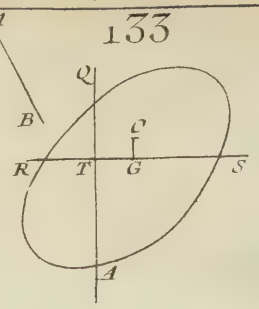

115
116
117
119
120
123
124
125
127
128
129
130

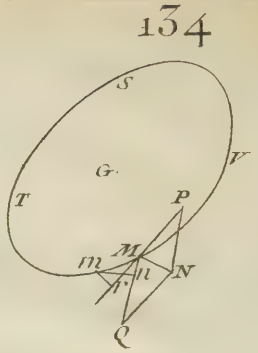

114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130

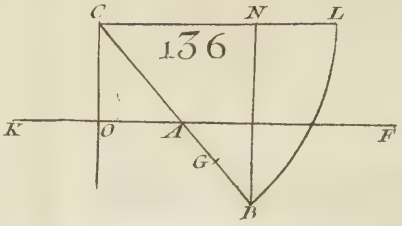

132
133
134
136
137
139
138
140
141
144
145
148
149
147

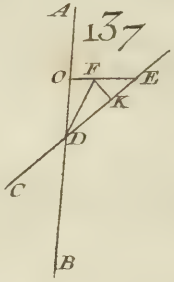

131

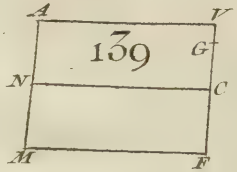

132

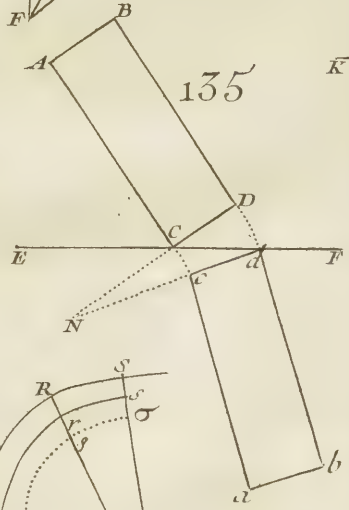

133

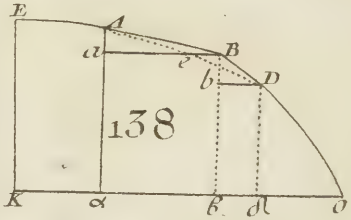

134

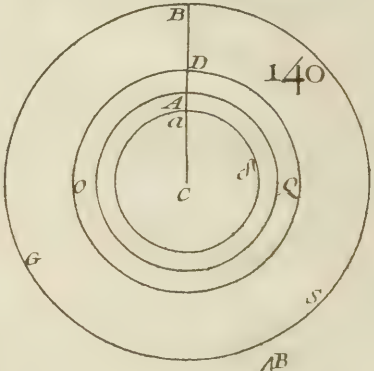

136

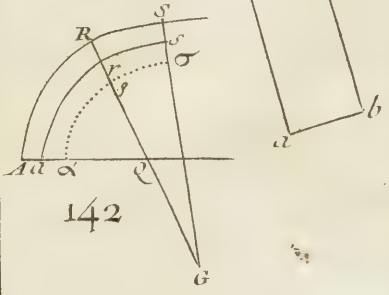

137

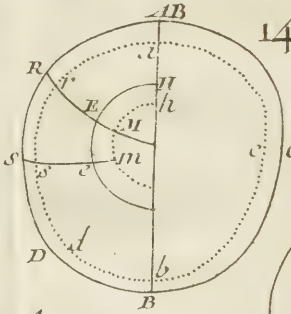

139

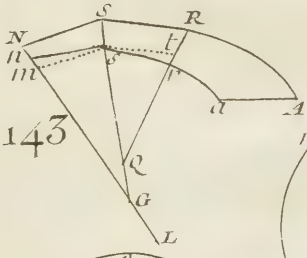

135

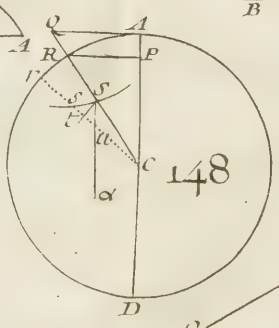

138

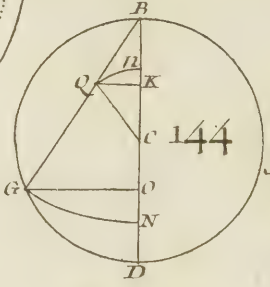

140

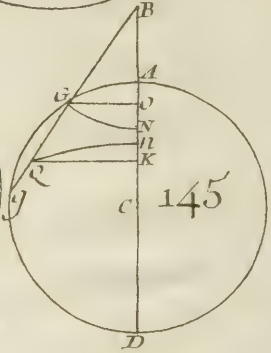

142

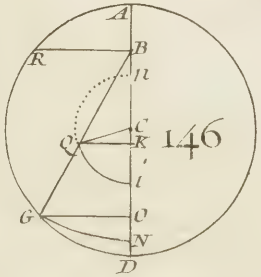

141

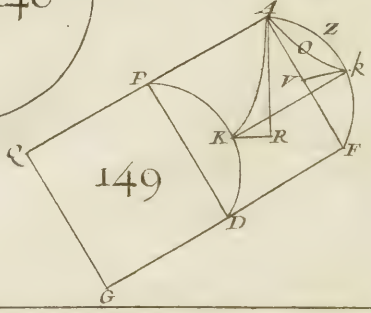

143

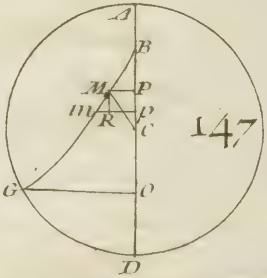

148

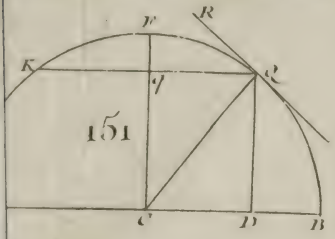

144

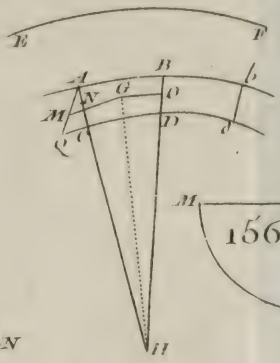

145

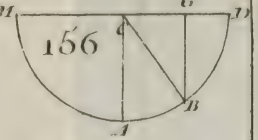

146

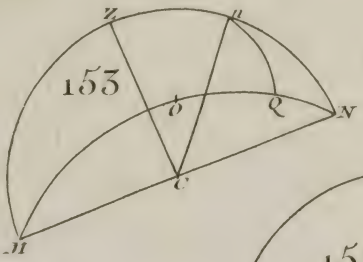

149

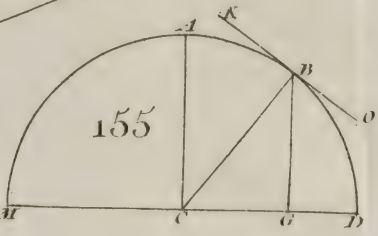

147

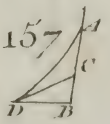

151

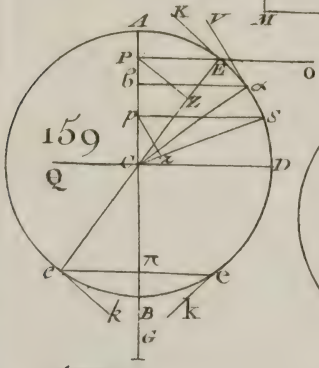

154

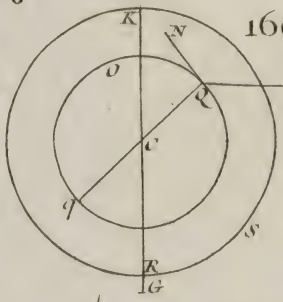

156

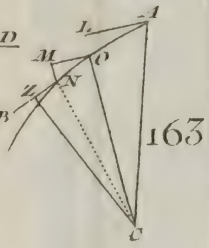

153

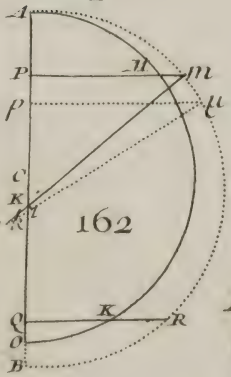

155

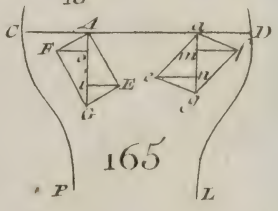

157

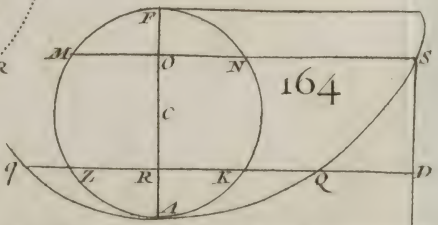

159

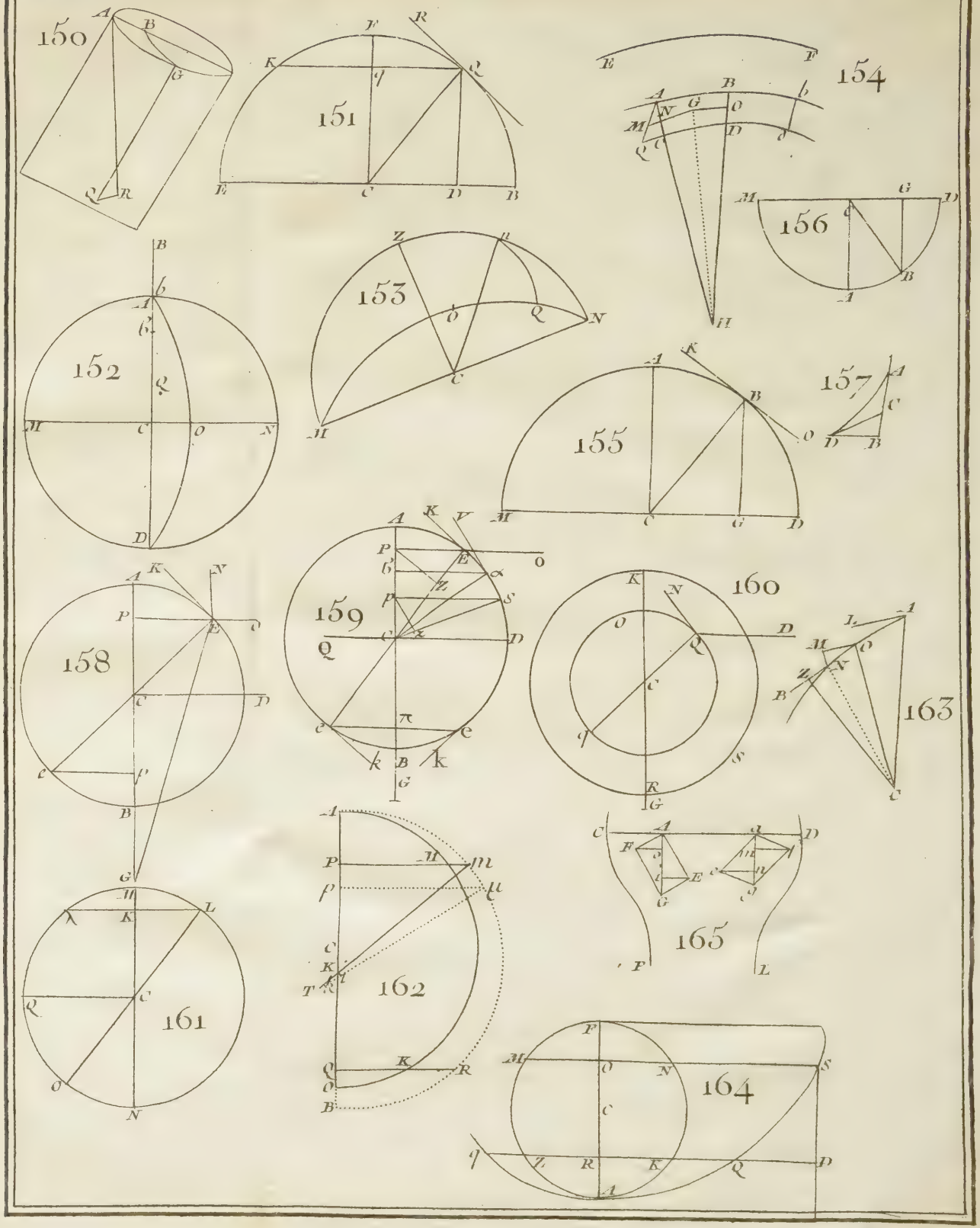

160


163


162


165


164


150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
532.2AL2T2 C001
TRAITE DE L'EQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DE
3 0112 017399053